Beiträge

zur

meteorologischen Optik

und

zu verwandten Wissenschaften.

In zwanglosen Heften

herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, der Königlich Schwedischen Societät der Wissenschaften zu Upsala und der Kaiserlich Oesterreichischen Akademie der Wissenschaften zu Wien ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

Erster Theil. Drittes Heft.

Mit einer lithographirten Tafel.

Leipzig, 1849.

Verlag von E. B. Schwickert.

Metamorphosirende Optik

VON

Dr. Ernst Abbe

VII.

Die Theorie der Luftspiegelung.

Von dem Herausgeber.

---

§. 1.

Bei der Entwickelung der Theorie der Luftspiegelung werde ich von einigen Sätzen ausgehen, deren Richtigkeit durch viele mit der grössten Sorgfalt und Genauigkeit von mehreren ausgezeichneten Physikern angestellte Versuche als ausser allem Zweifel gesetzt betrachtet werden kann, zu denen aber auch die physikalische Theorie des Lichts, die jedoch im Folgenden absichtlich nicht weiter angewandt werden soll, um der ganzen Untersuchung soviel als möglich einen vorzugsweise geometrischen Charakter zu verleihen, mit gleicher Sicherheit führt. Diese Sätze sollen jetzt, um eine sichere Grundlage für das Folgende zu gewinnen, und um alle Sätze, die als eigentliche Fundamentalsätze für das Folgende zu betrachten sind, beisammen zu haben, hier in der Kürze zusammengestellt werden, wenn dieselben auch längst allgemein bekannt sind, und sich in jedem etwas vollständigern physikalischen Lehrbuche sämmtlich finden. Wird dadurch auch eine kleine Wiederholung in Bezug auf andere Abhandlungen in dieser Zeitschrift veranlasst, so hat dies darin seinen Grund und findet dadurch seine Entschuldigung, dass alle Abhandlungen möglichst für sich und ganz unabhängig von anderen Abhandlungen verständlich sein und für sich ein Ganzes bilden sollen.

1.

Der erste dieser Sätze ist das bekannte Fundamentaltheorem der gesammten Dioptrik, dass nämlich für jede zwei brechende Körper oder Media das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels und des Sinus des Brechungswinkels zu einander constant ist, und

dass dieses Verhältniss jederzeit seinen reciproken Werth erhält, wenn die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt werden. Wird also für zwei brechende Körper überhaupt der Einfallswinkel durch ω, der Brechungswinkel durch ω' bezeichnet, und

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega'} = n$$

gesetzt, so ist die Grösse n, welche bekanntlich der Brechungsexponent für die beiden in Rede stehenden Körper genannt wird, constant oder verändert ihren Werth nicht, wie sich auch die beiden Winkel ω und ω' ändern mögen. Werden aber die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt, so dass der einfallende und der gebrochene Strahl, welche vorher respective im ersten und zweiten Körper lagen, jetzt respective im zweiten und ersten Körper liegen; so erhält der Brechungsexponent seinen reciproken Werth, und wird also in der vorhergehenden Bezeichnung durch den Bruch $\frac{1}{n}$ dargestellt. Auch hat die Erfahrung gelehrt, dass der Brechungsexponent immer grösser oder kleiner als die Einheit ist, jenachdem der Strahl aus einem dünnern in einen dichtern, oder aus einem dichtern in einen dünnern Körper übergeht. Im ersten Falle ist also jederzeit der Einfallswinkel grösser als der Brechungswinkel; im zweiten Falle ist dagegen der Einfallswinkel immer kleiner als der Brechungswinkel.

2.

Ferner haben die Versuche gelehrt, dass, wenn A und B zwei einander berührende, von parallelen Ebenen begränzte brechende Körper oder Media sind, und ein Strahl aus der Luft in den Körper A, hierauf aus dem Körper A in den Körper B, und dann aus dem Körper B wieder in die Luft übergeht, jederzeit der erste einfallende und der letzte ausfahrende Strahl, welche Strahlen beide in der Luft liegen, einander parallel sind. Bezeichnen wir also den Einfallswinkel und den Brechungswinkel für die Luft und den Körper A durch ω und ω', für den Körper A und den Körper B durch ω' und ω'', für den Körper B und die Luft durch ω'' und ω, wobei man nicht zu übersehen hat, dass die Körper A und B nach der Voraussetzung von parallelen Ebenen begränzt werden und in Folge der Beobachtungen und Versuche der erste einfallende und letzte ausfahrende Strahl einander parallel sind, die entsprechenden Brechungsexponenten aber durch n, n', n''; so ist nach 1.

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'} = n, \quad \frac{\sin\omega'}{\sin\omega''} = n', \quad \frac{\sin\omega''}{\sin\omega} = n'';$$

also, wenn man diese Gleichungen in einander multiplicirt:

$$n\,n'\,n'' = 1,$$

oder

$$n' = \frac{1}{n\,n''} = \frac{1}{n''} : n,$$

wo n der Brechungsexponent für Luft und den Körper A, ferner $\frac{1}{n''}$ der Brechungsexponent für Luft und den Körper B, endlich n' der Brechungsexponent für die Körper A und B ist. Dies hat überhaupt auf den folgenden, auch noch durch viele andere Versuche ausser allem Zweifel gesetzten Satz geführt:

Wenn für die beiden brechenden Körper A und B der Brechungsexponent β, für die beiden brechenden Körper A und C der Brechungsexponent γ ist, so ist jederzeit $\frac{\gamma}{\beta}$ der Brechungsexponent für die beiden brechenden Körper B und C.

Namentlich ist die Richtigkeit dieses Satzes auch in allen den Fällen, wo A der leere Raum ist, und B und C verschiedene Luftarten oder Gasarten sind, durch Versuche unzweifelhaft dargethan worden.

3.

Wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur 0 und dem barometrischen Drucke $0^m,76$ als Einheit der Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft annehmen; so ist nach allgemein bekannten physikalischen Gesetzen die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur t nach dem Centesimalthermometer und bei dem in Metern ausgedrückten barometrischen Drucke b:

$$\frac{b}{0^m,76.(1 + 0{,}00375.t)},$$

wobei wir auf die durch neuere Versuche gefundenen Werthe des Coefficienten 0,00375 jetzt keine Rücksicht nehmen, sondern diesen ältern Coefficienten, weil er der bekannteste und am Meisten gebrauchte ist, beibehalten wollen.

Bezeichnen wir nun den Brechungsexponenten für den leeren

Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur t und dem barometrischen Drucke b durch n, so zeigen bei verschiedenen Temperaturen und Barometerständen angestellte Versuche unzweifelhaft, dass der Quotient

$$(n^2 - 1) : \frac{b}{0^m,76 . (1 + 0{,}00375 . t)}$$

oder der Bruch

$$\frac{0^m,76 . (1 + 0{,}00375 . t)(n^2 - 1)}{b}$$

sehr nahe eine constante Grösse ist, d. h. dass die Grösse $n^2 - 1$, welche man gewöhnlich die brechende Kraft zu nennen pflegt, der Dichtigkeit der Luft proportional, oder dass der Quotient der brechenden Kraft durch die Dichtigkeit der Luft dividirt, welchen man gewöhnlich das Brechungsvermögen zu nennen pflegt, eine constante Grösse ist. Bezeichnen wir also, dies vorausgesetzt, den Brechungsexponenten für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ durch N, so ist $n = N$ für $t = 0$ und $b = 0^m,76$; folglich, weil der obige Bruch eine constante Grösse ist:

$$\frac{0^m,76 . (1 + 0{,}00375 . t)(n^2 - 1)}{b} = N^2 - 1,$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$N = \sqrt{1 + \frac{0^m,76 . (1 + 0{,}00375 . t)(n^2 - 1)}{b}},$$

mittelst welcher Formel der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ aus den durch unmittelbare Versuche bestimmten Werthen des Brechungsexponenten n für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur t und Barometerhöhe b berechnet werden kann.

Nach Biot ist bis auf sieben Decimalstellen genau

$$N = 1{,}0002943$$

und

$$N^2 - 1 = 0{,}0005888.$$

Aus der obigen Gleichung zwischen n und N folgt auch

$$n = \sqrt{1 + \frac{b(N^2 - 1)}{0^m,76 . (1 + 0{,}00375 . t)}},$$

d. i., wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur t und der Barometerhöhe b durch D bezeichnen, weil nach dem Obigen

$$D = \frac{b}{0^m,76 . (1 + 0{,}00375 . t)}$$

ist,

$$n = \sqrt{1 + (N^2 - 1) D},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K = N^2 - 1 = 0{,}0005888$$

setzen, wo also K eine constante Grösse ist:

$$n = \sqrt{1 + KD}.$$

Ist n_1 der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D_1, so ist nach der vorhergehenden Gleichung:

$$n_1 = \sqrt{1 + KD_1};$$

also ist nach 2.

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{1 + KD_1}}{\sqrt{1 + KD}} = \sqrt{\frac{1 + KD_1}{1 + KD}}$$

der Brechungsexponent für atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D_1. Weil

$$1 + KD_1 = 1 + KD + K(D_1 - D)$$

ist, so ist auch

$$\frac{n_1}{n} = \sqrt{1 + \frac{K(D_1 - D)}{1 + KD}}.$$

Dies sind die Erfahrungssätze, — wenigstens wollen wir diese Sätze jetzt bloss als auf dem Wege der Erfahrung gewonnene Sätze ansehen, — welche wir unserer folgenden Entwickelung der Theorie der Luftspiegelung zum Grunde legen werden.

§. 2.

Die Erde nehmen wir bei den folgenden Untersuchungen als eben an, was im vorliegenden Falle wenigstens ohne allen merklichen Fehler gewiss verstattet sein wird; und denken wir uns dann die Atmosphäre in Schichten von gleicher Höhe, in deren jeder die Luft als gleichförmig dicht angenommen wird, getheilt, so muss man sich diese Schichten sämmtlich als von der Erdfläche parallelen

Ebenen begränzt vorstellen. Ferner nehmen wir eine Vertikalebene als Ebene der xy an, auf welche wir alle unsere folgenden Betrachtungen beziehen, indem wir nur den Weg eines fortwährend in dieser Vertikalebene die Atmosphäre durchdringenden Lichtstrahls betrachten. Die Axe der x nehmen wir horizontal, die Axe der y vertikal an, so dass in den Figuren der positive Theil der Axe der x stets nach der rechten Seite, der positive Theil der Axe der y nach oben hin liegt.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun überhaupt n gleich hohe Schichten der Atmosphäre in stetiger Folge, in deren jeder die Luft als gleichförmig dicht vorausgesetzt wird, betrachten, und wollen annehmen, dass ein von einem Punkte s in der äussersten Gränze der ersten Schicht ausgehender Lichtstrahl bei dem Punkte s_1 in die 2te Schicht, bei dem Punkte s_2 in die 3te Schicht, u. s. w., bei dem Punkte s_{n-2} in die $(n-1)$te Schicht, bei dem Punkte s_{n-1} in die $n$te Schicht trete, und bei dem Punkte s_n an der äussersten Gränze der $n$ten Schicht anlange, wobei in den Punkten

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}$$

der Strahl Brechungen erleidet. Durch die sämmtlichen Punkte

$$s, s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}, s_n$$

wollen wir uns Vertikallinien gezogen denken, und wollen in den Punkten

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}$$

die Einfallswinkel respective durch

$$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots z_{n-1};$$

die Brechungswinkel respective durch

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \ldots \zeta_{n-1}$$

bezeichnen. Die spitzen Winkel, welche der erste und letzte Strahl ss_1 und $s_{n-1}s_n$ respective mit den Vertikalen in s und s_n einschliessen, sollen durch ζ und z_n bezeichnet werden. Die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft in der

$$1\text{sten}, 2\text{ten}, 3\text{ten}, 4\text{ten}, \ldots n\text{ten}$$

Schicht seien respective

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots \lambda_n.$$

Dies vorausgesetzt, müssen wir nun zwei Fälle unterscheiden, jenachdem der Strahl nach und nach aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt.

In dem ersten Falle, welchem Taf. VI. Fig. 1. und Taf. VI. Fig. 1*. entsprechen, wenn nämlich der Strahl nach und nach aus den oberen in die unteren Schichten tritt, ist nach §. 1. 1. und §. 1. 2.

$$\frac{\sin z_1}{\sin \zeta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\frac{\sin z_2}{\sin \zeta_2} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

$$\frac{\sin z_3}{\sin \zeta_3} = \frac{\lambda_4}{\lambda_3},$$

$$\frac{\sin z_4}{\sin \zeta_4} = \frac{\lambda_5}{\lambda_4},$$

u. s. w.

$$\frac{\sin z_{n-1}}{\sin \zeta_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}};$$

also, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichungen multiplicirt:

$$\frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_{n-1}}{\sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin \zeta_3 \sin \zeta_4 \ldots \sin \zeta_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\zeta_1 = z_2,\ \zeta_2 = z_3,\ \zeta_3 = z_4,\ \ldots\ \zeta_{n-2} = z_{n-1};$$

also, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\frac{\sin z_1}{\sin \zeta_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1},$$

und folglich, weil offenbar auch $z_1 = \zeta$, $\zeta_{n-1} = z_n$ ist:

$$\frac{\sin \zeta}{\sin z_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Bezeichnen wir nun die Gränzen, denen, wenn n in's Unendliche wächst und demzufolge der Weg des Lichtstrahls in eine stetig gekrümmte Linie übergeht, die Grössen

$$\zeta,\ z_n,\ \lambda_1,\ \lambda_n$$

sich nähern, respective durch

$$\mathfrak{Z},\ Z,\ \mathfrak{L},\ L;$$

wo $\mathfrak{Z}$, Z die spitzen Winkel der Berührenden des Wegs oder der Trajectoria des Lichts im Ausgangspunkte und Endpunkte des Strahls

mit den diesen Punkten entsprechenden Vertikalen, und $\mathfrak{L}$, L die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft im Ausgangspunkte und Endpunkte des Strahls bezeichnen; so ist nach dem Obigen offenbar

$$\frac{\sin \mathfrak{Z}}{\sin Z} = \frac{L}{\mathfrak{L}}$$

oder

$$\mathfrak{L} \sin \mathfrak{Z} = L \sin Z.$$

Hieraus sieht man, dass die Grösse $L \sin Z$ für denselben Strahl oder dieselbe Refractionscurve constant, und folglich, wenn wir diese Constante durch μ bezeichnen,

$$L \sin Z = \mu$$

ist.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Ausgangspunkts des Strahls durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und die Coordinaten seines Endpunkts durch x, y; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie offenbar in dem Falle Taf. VI. Fig. 1.

$$\tang (180^0 - Z) = \frac{\partial x}{\partial y}, \text{ d. i. } \tang Z = -\frac{\partial x}{\partial y};$$

dagegen ist in dem Falle Taf. VI. Fig. 1*.

$$\tang Z = \frac{\partial x}{\partial y};$$

also ist allgemein

$$\tang Z = \mp \frac{\partial x}{\partial y},$$

wenn das obere Zeichen dem Falle Taf. VI. Fig. 1., das untere dem Falle Taf. VI. Fig. 1*. entspricht.

In dem zweiten der beiden oben namhaft gemachten Fälle, welchem Taf. VI. Fig. 2. und Taf. VI. Fig. 2*. entsprechen, wenn nämlich der Strahl nach und nach aus den unteren in die oberen Schichten tritt, gelangt man durch eine der vorhergehenden ganz ähnliche Betrachtung zu der Gleichung

$$L \sin Z = \mu,$$

wo auch die Symbole ganz ähnliche Bedeutungen haben wie vorher. Bezeichnen wir nun aber wieder die Coordinaten des Ausgangspunkts des Strahls durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und die Coordinaten seines Endpunkts durch x, y; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie offenbar in dem Falle Taf. VI. Fig. 2.

$$tang\, Z = \frac{\partial x}{\partial y},$$

dagegen in dem Falle Taf. VI. Fig. 2*.

$$tang(180^0 - Z) = \frac{\partial x}{\partial y}, \text{ d. i. } tang\, Z = -\frac{\partial x}{\partial y};$$

also allgemein

$$tang\, Z = \pm\frac{\partial x}{\partial y},$$

wenn das obere Zeichen dem Falle Taf. VI. Fig. 2., das untere dem Falle Taf. VI. Fig. 2*. entspricht.

Um nun aber die folgenden Betrachtungen möglichst zu vereinfachen, wollen wir, wodurch die Allgemeinheit der Untersuchung offenbar nicht beeinträchtigt werden wird, die positiven y immer nach oben, die positiven x aber immer so annehmen, dass, wenn man sich durch den Ausgangspunkt des Strahls ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem gelegt dächte, in diesem Systeme der positive Theil der ersten Coordinatenaxe mit dem Strahle auf einer und derselben Seite der zweiten Coordinatenaxe liegen würde, welcher Voraussetzung offenbar die Fälle Taf. VI. Fig. 1. und Taf. VI. Fig. 2. entsprechen, so dass man also unter dieser Voraussetzung nach dem Vorhergehenden die beiden Gleichungen

$$1)\quad L\sin Z = \mu$$

und

$$2)\quad tang\, Z = \mp\frac{\partial x}{\partial y}$$

hat, wo man in der Gleichung 2) das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem der Strahl nach und nach aus den oberen Schichten in die unteren Schichten, oder aus den unteren Schichten in die oberen Schichten tritt, was von nun an im Folgenden stets festgehalten werden soll.

§. 3.

Weil nach 2), indem immer die wegen der Vorzeichen gegebene Bestimmung festgehalten wird,

$$tang\, Z = \mp\frac{\partial x}{\partial y},$$

und nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\sin Z^2 = \frac{\operatorname{tang} Z^2}{1 + \operatorname{tang} Z^2}$$

ist, so ist

$$\sin Z^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

also, weil $\sin Z$ immer positiv ist:

$$3)\quad \sin Z = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}.$$

Weil ferner bekanntlich

$$\cos Z = \frac{\sin Z}{\operatorname{tang} Z}$$

ist, so ist

$$4)\quad \cos Z = \mp \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

wo, wie immer, das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt.

Auch ist unmittelbar nach 2)

$$5)\quad \cot Z = \mp \frac{\partial y}{\partial x},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen.

Weil nun aber nach 1) allgemein

$$L \sin Z = \mu$$

ist, so ist nach 3)

$$6)\quad \frac{L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = \mu.$$

Bezeichnen wir jetzt die Dichtigkeit der Luft in der dem Endpunkte der vertikalen Coordinate y entsprechenden horizontalen Schicht durch $\mathfrak{D}_y$, so ist nach §. 1. 3.

$$7)\quad L = \sqrt{1 + K\mathfrak{D}_y},$$

wo die numerische Constante K den in §. 1. angegebenen Werth hat. Also ist

$$8)\quad \frac{\sqrt{1+K\mathfrak{D}y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}=\mu,$$

oder

$$9)\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\frac{1}{\mu}\sqrt{1+K\mathfrak{D}_y},$$

folglich

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{1+K\mathfrak{D}_y}{\mu^2},$$

woraus

$$10)\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{1-\mu^2}{\mu^2}+\frac{K}{\mu^2}\mathfrak{D}_y,$$

oder, wenn man

$$11)\quad \mathfrak{A}=\frac{1-\mu^2}{\mu^2},\quad \mathfrak{B}=\frac{k}{\mu^2}$$

setzt, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Constanten sind:

$$12)\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{D}_y$$

folgt. Nach dem Obigen ist aber

$$cot\,Z=\mp\frac{\partial y}{\partial x},\ \text{also}\ cot\,Z^2=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2;$$

folglich

$$cot\,Z^2=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{D}_y,$$

woraus, weil Z ein spitzer Winkel und daher $cot\,Z$ positiv ist,

$$13)\quad cot\,Z=\sqrt{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{D}_y}$$

folgt. Also ist nach dem Vorhergehenden mit der gewöhnlichen Bestimmung wegen der Vorzeichen

$$\mp\frac{\partial y}{\partial x}=\sqrt{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{D}_y}$$

oder

$$14)\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\mp\sqrt{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{D}_y}.$$

Setzen wir nun

$$15)\ \mathfrak{D}_y = \mathfrak{D}_y + D^{(y)}_{(y)} \text{ oder } D^{(y)}_{(y)} = \mathfrak{D}_y - \mathfrak{D}_y,$$

wo $D^{(y)}_{(y)}$ die Veränderung bezeichnet, welche die Dichtigkeit der Luft von der dem Ausgangspunkte des Strahls entsprechenden horizontalen Schicht bis zu der dem Endpunkte des Strahls entsprechenden horizontalen Schicht erleidet, und demzufolge natürlich positiv und negativ sein kann, auch

$$16)\ D^{(y)}_{(y)} = 0$$

ist; so ist

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y + \mathfrak{B} D^{(y)}_{(y)},$$

oder, wenn wir den Ausgangspunkt $(x\,y)$ des Strahls als gegeben oder constant, demzufolge natürlich auch $\mathfrak{D}_y$ als constant betrachten, und der Kürze wegen

$$17)\ A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y,\ B = \mathfrak{B}$$

setzen, wo A und B Constanten bezeichnen,

$$18)\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y = A + B D^{(y)}_{(y)},$$

also nach 14):

$$19)\ \frac{\partial y}{\partial x} = \mp\sqrt{A + B D^{(y)}_{(y)}},$$

oder

$$20)\ \frac{\partial x}{\partial y} = \mp\frac{1}{\sqrt{A + B D^{(y)}_{(y)}}},$$

oder

$$21)\ \partial x = \mp\frac{\partial y}{\sqrt{A + B D^{(y)}_{(y)}}},$$

welche Form der Gleichung den sogleich von selbst ersichtlichen Vortheil darbietet, dass x bloss durch y ausgedrückt ist, oder dass in derselben die veränderlichen Grössen gesondert sind.

§. 4.

Wir wollen nun auch den zweiten Differentialquotienten entwickeln, weil wir von demselben späterhin Gebrauch zu machen Gelegenheit haben werden.

Nach 12) ist

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_y,$$

also, wenn man differentiirt:

$$2\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mathfrak{B}\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial x},$$

folglich

$$22)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,\mathfrak{B}\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\} = {}^1/_2\,B\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\},$$

oder nach einem bekannten Princip der Differentialrechnung:

$$23)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,\mathfrak{B}\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} = {}^1/_2\,B\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y}.$$

Ferner ist nach 19)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = A + B\,D^{(y)}_{(\eta)},$$

also, wenn man differentiirt:

$$2\,\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = B\,\frac{\partial\, D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial x},$$

folglich

$$24)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,B\left\{\frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\} = {}^1/_2\,\mathfrak{B}\left\{\frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\},$$

oder nach dem schon vorher angewandten Princip der Differentialrechnung:

$$25)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,B\,\frac{\partial\, D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y} = {}^1/_2\,\mathfrak{B}\,\frac{\partial\, D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y}.$$

§. 5.

Zuvörderst ist nun nöthig, dass wir uns mit der weiteren Entwickelung und Bestimmung der Constanten A, B und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ beschäftigen.

Setzen wir allgemein

$$26)\quad y = \varphi(x),\ \text{also}\ \frac{\partial y}{\partial x} = \varphi'(x);$$

so ist nach 19)

$$\varphi'(x) = \mp\sqrt{A + BD^{(y)}_{(\eta)}},$$

also

$$(\varphi'(x))^2 = A + BD^{(y)}_{(\eta)},$$

und folglich, wenn man gleichzeitig, wie es erforderlich ist, x für x und y für y setzt:

$$(\varphi'(x))^2 = A + BD^{(\eta)}_{(\eta)},$$

woraus sich nach 16)

$$27)\quad A = (\varphi'(x))^2$$

ergiebt, und zugleich erhellet, dass die Constante A positiv ist.

Weil nach 11)

$$\mathfrak{A} = \frac{1-\mu^2}{\mu^2}, \quad \mathfrak{B} = \frac{K}{\mu^2}$$

ist, so ist

$$\mu^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{A}},$$

und folglich

$$\mathfrak{B} = B = K(1+\mathfrak{A}).$$

Ferner ist nach 17)

$$\mathfrak{A} = A - \mathfrak{B}\mathfrak{D}_\eta = A - B\mathfrak{D}_\eta,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$B = K(1 + A - B\mathfrak{D}_\eta),$$

woraus

$$B = \frac{K(1+A)}{1+K\mathfrak{D}_\eta},$$

also nach 27)

$$28)\quad B = \frac{K\{1 + (\varphi'(x))^2\}}{1+K\mathfrak{D}_\eta}$$

folgt, und zugleich erhellet, dass auch die Constante B positiv ist.

Setzt man der Kürze wegen

$$29)\quad \omega = \varphi'(x), \quad \overline{\omega} = \sqrt{\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\eta}};$$

welches Letztere verstattet ist, da die Grösse

$$\frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\eta}$$

offenbar positiv ist, da K und $\mathfrak{D}_\eta$ positive Grössen sind; so ist

$$30)\quad \omega = \varphi'(x),\ \overline{\omega}^2 = \frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\eta};$$

folglich nach 27) und 28)

$$31)\quad A = \omega^2,\ \ B = (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2;$$

und daher nach 19), 20), 21):

$$32)\quad \varphi'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \mp\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}},$$

oder

$$33)\quad \frac{\partial x}{\partial y} = \mp\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}}},$$

oder

$$34)\quad \partial x = \mp\frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}}}.$$

Nach 25) und 26) ist:

$$35)\quad \varphi''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 \frac{\partial D^{(\gamma)}_{(\eta)}}{\partial y}.$$

Weil nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{A} = A - B\mathfrak{D}_\eta$$

ist, so ist

$$\mathfrak{A} = \omega^2 - (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\mathfrak{D}_\eta = \omega^2 - (1+\omega^2)\frac{K\mathfrak{D}_\eta}{1+K\mathfrak{D}_\eta},$$

d. i.

$$\mathfrak{A} = \frac{\omega^2 - K\mathfrak{D}_\eta}{1+K\mathfrak{D}_\eta},$$

oder

$$36)\quad \mathfrak{A} = \frac{(\varphi'(x))^2 - K\mathfrak{D}_\eta}{1+K\mathfrak{D}_\eta}.$$

Aus der Gleichung

$$\overline{\omega}^2 = \frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\eta}$$

folgt auch

$$37)\quad \mathfrak{D}_\eta = \frac{K-\overline{\omega}^2}{K\overline{\omega}^2},$$

also ist nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{A} = \omega^2 - (1+\omega^2)\overline{\omega}^2 \frac{K-\overline{\omega}^2}{K\overline{\omega}^2},$$

oder

$$\mathfrak{A} = \omega^2 - (1+\omega^2)\frac{K-\overline{\omega}^2}{K},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$38)\ \mathfrak{A} = \frac{(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 - K}{K} = \frac{(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{K} - 1.$$

Ferner ist

$$39)\ \mathfrak{B} = B = (1+\omega^2)\overline{\omega}^2.$$

Weil nach 38)

$$1 + \mathfrak{A} = \frac{(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{K},$$

und nach dem Obigen

$$\mu^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{A}}$$

ist, so ist

$$\mu^2 = \frac{K}{(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

also, weil $\mu = L \sin Z$ offenbar eine positive Grösse, und nach dem Obigen auch $\overline{\omega}$ positiv ist:

$$40)\ \mu = \frac{\sqrt{K}}{\overline{\omega}\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1}{\overline{\omega}}\sqrt{\frac{K}{1+\omega^2}}.$$

Führt man für ω und $\overline{\omega}$ ihre aus dem Obigen bekannten Werthe ein, so wird

$$41)\ \mu = \sqrt{\frac{1+K\mathfrak{D}_v}{1+(\varphi'(x))^2}}.$$

§. 6.

Bezeichnen wir den spitzen Neigungswinkel der Berührenden der Trajectoria in dem Ausgangspunkte $(x\,y)$ des Strahls gegen den Horizont, indem wir diesen Winkel als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem der Strahl aus den unteren in die oberen oder aus den oberen in die unteren Schichten tritt, durch i; so ist offenbar, indem die Zeichen immer wie oben genommen werden:

$$\mathfrak{Z} = 90^0 \pm i,$$

also

$$cot\,\mathfrak{Z} = cot\,(90^0 \pm i) = \mp\, tang\, i.$$

Weil nun nach 5) und 26)

$$cot\, Z = \mp \frac{\partial y}{\partial x} = \mp\, \varphi'(x),$$

also

$$cot\,\mathfrak{Z} = \mp\, \varphi'(x)$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden allgemein

$$42)\quad tang\, i = \varphi'(x),$$

d. i. nach 30)

$$43)\quad \omega = tang\, i.$$

Folglich ist $1 + \omega^2 = sec\, i^2$, und daher nach 32)

$$44)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sqrt{tang\, i^2 + \overline{\omega}^2\, sec\, i^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}},$$

d. i., weil $cos\, i$ jedenfalls positiv ist:

$$45)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{\sqrt{sin\, i^2 + \overline{\omega}^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}}}{cos\, i},$$

oder

$$46)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \mp\, sec\, i \sqrt{sin\, i^2 + \overline{\omega}^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}}.$$

Auch ist

$$47)\quad \frac{\partial x}{\partial y} = \mp \frac{cos\, i}{\sqrt{sin\, i^2 + \overline{\omega}^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}}},$$

oder

$$48)\quad \partial x = \mp \frac{cos\, i\, \partial y}{\sqrt{sin\, i^2 + \overline{\omega}^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}}},$$

Weil nach dem Obigen, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt, $sin\, i$ negativ oder positiv ist, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\partial x = \frac{cos\, i\, \partial y}{sin\, i \sqrt{1 + \overline{\omega}^2\, cosec\, i^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}}},$$

d. i.

$$49)\quad \partial x = \frac{cot\, i\, \partial y}{\sqrt{1 + \overline{\omega}^2\, cosec\, i^2\, D^{(\gamma)}_{(\eta)}}}.$$

Führt man für ϖ^2 seinen bekannten Werth in die vorhergehenden Formeln ein, so wird

$$50)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{\sqrt{\sin i^2 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\eta} D_{(\eta)}^{(\gamma)}}}{\cos i},$$

oder

$$51)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sec i \sqrt{\sin i^2 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\eta} D_{(\eta)}^{(\gamma)}};$$

ferner

$$52)\quad \frac{\partial x}{\partial y} = \mp \frac{\cos i}{\sqrt{\sin i^2 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\eta} D_{(\eta)}^{(\gamma)}}},$$

oder

$$53)\quad \partial x = \mp \frac{\cos i \, \partial y}{\sqrt{\sin i^2 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\eta} D_{(\eta)}^{(\gamma)}}},$$

oder

$$54)\quad \partial x = \frac{\cot i \, \partial y}{\sqrt{1 + \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\eta} \operatorname{cosec} i^2 \, D_{(\eta)}^{(\gamma)}}}.$$

Auch ist nach 31)

$$55)\quad A = \operatorname{tang} i^2, \; B = \sec i^2 \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_\eta}$$

oder

$$56)\quad A = \operatorname{tang} i^2, \; B = \frac{K \sec i^2}{1 + K\mathfrak{D}_\eta} = \frac{K}{(1 + K\mathfrak{D}_\eta)\cos i^2}.$$

Ferner ist nach 38)

$$57)\quad \mathfrak{A} = \frac{\sec i^2}{1 + K\mathfrak{D}_\eta} - 1 = \frac{1}{(1 + K\mathfrak{D}_\eta)\cos i^2} - 1$$

oder

$$58)\quad \mathfrak{A} = \frac{\operatorname{tang} i^2 - K\mathfrak{D}_\eta}{1 + K\mathfrak{D}_\eta} = \frac{\sin i^2 - K\mathfrak{D}_\eta \cos i^2}{(1 + K\mathfrak{D}_\eta)\cos i^2}$$

und nach 39)

$$59)\quad \mathfrak{B} = \frac{K \sec i^2}{1 + K\mathfrak{D}_\eta} = \frac{K}{(1 + K\mathfrak{D}_\eta)\cos i^2}.$$

§. 7.

In Betreff des zweiten Differentialquotienten bemerken wir noch Folgendes.

Nach 23) und 25) ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2 B \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} = {}^1/_2 B \frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y}.$$

Also ist

$$60) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2 (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} = {}^1/_2 (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 \frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y},$$

oder

$$61) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1/_2\,\overline{\omega}^2 \sec i^2 \frac{\partial \mathfrak{D}'_\eta}{\partial y} = {}^1/_2\,\overline{\omega}^2 \sec i^2 \frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y},$$

oder

$$62) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{K \sec i^2}{2(1+K\mathfrak{D}_\eta)} \cdot \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} = \frac{K \sec i^2}{2(1+K\mathfrak{D}_\eta)} \cdot \frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y},$$

oder

$$63) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{K}{2(1+K\mathfrak{D}_\gamma)\cos i^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} = \frac{K}{2(1+K\mathfrak{D}_\gamma)\cos i^2} \cdot \frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y}.$$

Weil $B = (1+\omega^2)\overline{\omega}^2$ positiv ist, so hat

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

gleiches Vorzeichen mit

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} \text{ oder } \frac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y}.$$

§. 8.

So lange

$$\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)} > 0,$$

d. i.

$$D^{(y)}_{(\eta)} > -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

ist, ist nach dem Obigen $\frac{\partial y}{\partial x}$, d. i.

$$cot Z = \mp \frac{\partial y}{\partial x},$$

und also auch Z reell.

Wenn

$$\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(\gamma)} = 0,$$

d. i.

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

ist, so ist nach dem Obigen $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, also

$$cot Z = 0,\ Z = 90^0;$$

d. h. die Berührende der Trajectoria in dem Punkte (xy) schliesst mit der Axe der y einen rechten Winkel ein, und ist folglich horizontal.

So lange

$$\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(\gamma)} < 0,$$

d. i.

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} < -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

ist, ist nach dem Obigen $\frac{\partial y}{\partial x}$, d. i.

$$cot Z = \mp \frac{\partial y}{\partial x},$$

und also auch Z imaginär.

Weil nach dem Obigen bekanntlich

$$\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2} = \frac{tang\, i^2}{\overline{\omega}^2\, sec\, i^2} = \frac{sin\, i^2}{\overline{\omega}^2} = \frac{1+K\mathfrak{D}_\eta}{K}\, sin\, i^2$$

ist, so sind die vorhergehenden Bedingungen

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} \gtreqless -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

einerlei mit den Bedingungen

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} \gtreqless -\frac{1+K\mathfrak{D}_\eta}{K}\, sin\, i^2,$$

d. i., weil

$$-\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\eta}$$

negativ ist, einerlei mit den Bedingungen

$$-\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\eta}\,D^{(\gamma)}_{(\eta)} \gtreqless \sin i^2,$$

oder

$$\sin i^2 \lesseqgtr -\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\eta}\,D^{(\gamma)}_{(\eta)}.$$

Weil nach dem Obigen bekanntlich

$$D^{(\gamma)}_{(\eta)} = \mathfrak{D}_\gamma - \mathfrak{D}_\eta$$

ist, so kann man statt der Bedingungen

$$D^{(\gamma)}_{(\eta)} \gtreqless -\frac{1+K\mathfrak{D}_\eta}{K}\sin i^2$$

auch setzen

$$\mathfrak{D}_\gamma - \mathfrak{D}_\eta \gtreqless -\frac{1+K\mathfrak{D}_\eta}{K}\sin i^2,$$

oder

$$\mathfrak{D}_\gamma \gtreqless \mathfrak{D}_\eta - \frac{1+K\mathfrak{D}_\eta}{K}\sin i^2,$$

oder

$$\mathfrak{D}_\gamma \gtreqless -\frac{\sin i^2 - K\mathfrak{D}_\eta \cos i^2}{K};$$

und statt der Bedingungen

$$\sin i^2 \gtreqless -\frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\eta}\,D^{(\gamma)}_{(\eta)}$$

kann man setzen:

$$\sin i^2 \gtreqless -\frac{K(\mathfrak{D}_\gamma - \mathfrak{D}_\eta)}{1+K\mathfrak{D}_\eta}.$$

Rücksichtlich der Bedingungen

$$\mathfrak{D}_\gamma \gtreqless -\frac{\sin i^2 - K\mathfrak{D}_\eta \cos i^2}{K}$$

kann man aber auch noch bemerken, dass dieselben einerlei sind mit den Bedingungen

$$K\mathfrak{D}_y \gtreqless K\mathfrak{D}_\eta \cos i^2 - \sin i^2,$$

oder

$$1 + K\mathfrak{D}_y \gtreqless (1 + K\mathfrak{D}_\eta) \cos i^2,$$

oder

$$\frac{1 + K\mathfrak{D}_\eta}{1 + K\mathfrak{D}_y} \cos i^2 \lesseqgtr 1,$$

oder

$$\frac{\sqrt{1 + K\mathfrak{D}_\eta}}{\sqrt{1 + K\mathfrak{D}_y}} \cos i \lesseqgtr 1;$$

d. i., weil nach 7)

$$L = \sqrt{1 + K\mathfrak{D}_y},\ \mathfrak{L} = \sqrt{1 + K\mathfrak{D}_\eta}$$

und nach §. 6.

$$\mathfrak{Z} = 90^0 \pm i, \text{ also } \sin \mathfrak{Z} = \cos i$$

ist, einerlei mit den Bedingungen

$$\frac{\mathfrak{L}}{L} \sin \mathfrak{Z} \lesseqgtr 1,$$

also, weil bekanntlich

$$L \sin Z = \mathfrak{L} \sin \mathfrak{Z}$$

ist, einerlei mit den Bedingungen

$$\sin Z \lesseqgtr 1.$$

§. 9.

Ein Uebergang von

$$\omega^2 + (1 + \omega^2)\, \overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)} > 0$$

zu

$$\omega^2 + (1 + \omega^2)\, \overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)} < 0,$$

oder von

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} > -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

zu

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} < -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2},$$

d. h. nach dem vorhergehenden Paragraphen ein Uebergang von der Möglichkeit der Trajectoria zu einer Unmöglichkeit derselben, kann, eine stetige Veränderung von $D_{(\eta)}^{(\gamma)}$ vorausgesetzt, immer nur durch

$$\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(\gamma)} = 0$$

oder durch

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

vor sich gehen. Dann ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen die Berührende der Trajectoria in dem entsprechenden Punkte (xy) horizontal, und der Strahl kann also gar nicht weiter nach oben oder nach unten hin in der Atmosphäre vordringen, sondern wird sich von dem in Rede stehenden Punkte an fortwährend nach einer dem Horizonte parallelen Richtung bewegen; er kann jedoch, wenn man sich denkt, dass seine Neigung gegen den Horizont gewissermassen nur unendlich klein geworden sei, durch eine Reflexion an den betreffenden Schichten der Atmosphäre wieder nach unten oder nach oben gebeugt werden, und wird dann einen zweiten Zweig der Trajectoria beschreiben, welcher dem vor der erlittenen Reflexion beschriebenen ersten Zweige offenbar vollkommen symmetrisch ist, d. h. durch Umdrehung des ersten Zweigs um eine gewisse vertikale, auf der Axe der x also senkrecht stehende oder der Axe der y parallele gerade Linie, welche die Axe der Trajectoria genannt werden soll, entstanden gedacht werden kann. Dieser zweite Zweig der Trajectoria, insofern es einen solchen giebt, was jederzeit besonders ermittelt werden muss, indem man untersucht, ob $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ werden kann, soll im Gegensatz zu dem ersten vor der erlittenen Reflexion beschriebenen Zweige, den wir den directen Zweig nennen wollen, der reflectirte Zweig der Trajectoria genannt werden, und nur wenn ein solcher reflectirter Zweig existirt, findet eine eigentliche Luftspiegelung Statt. Den Ausgangspunkt (xy) des Strahls sieht jedes

in dem directen Zweige der Trajectoria befindliche Auge direct, jedes in dem reflectirten Zweige befindliche Auge dagegen durch Luftspiegelung.

Bezeichnen wir die primitiven Coordinaten des Punktes der Trajectoria, in welchem $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ wird oder die Berührende der Trajectoria der Axe der x parallel ist, also nach dem Vorhergehenden eine Luftspiegelung Statt findet, welcher Punkt etwa der Scheitel der Trajectoria genannt werden mag, wenn es nämlich überhaupt einen solchen Punkt giebt, durch ξ, η, und legen durch diesen Punkt $(\xi\eta)$ ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem der XY; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein

$$x = \xi + X,\ y = \eta + Y.$$

Unterscheiden wir jetzt den directen und reflectirten Zweig von einander, und bezeichnen deshalb die Coordinaten der Punkte im ersten durch Hinzufügung oberer Accente, die Coordinaten der Punkte im zweiten durch Hinzufügung unterer Accente zu den allgemeinen Symbolen der Coordinaten; so ist nach dem Obigen für den directen Zweig

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(y)}^{(y')}}.$$

Weil aber nach dem Vorhergehenden

$$x' = \xi + X',\ y' = \eta + Y'$$

ist, so ist

$$\partial x' = \partial X',\ \partial y' = \partial Y',\ \frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\partial Y'}{\partial X'};$$

also

$$\frac{\partial Y'}{\partial X'} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(\eta+Y')}},$$

oder auch in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\frac{\partial Y'}{\partial X'} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta+\mathfrak{Y}')}^{(\eta+Y')}},$$

die Vorzeichen immer nach der aus dem Obigen bekannten Regel genommen.

Wegen der Symmetrie des directen und reflectirten Zweigs ist aber allgemein

$$X' = -X_1, \quad Y' = Y_1;$$

also

$$\partial X' = -\partial X_1, \quad \partial Y' = \partial Y_1, \quad \frac{\partial Y'}{\partial X'} = -\frac{\partial Y_1}{\partial X_1};$$

und es ist folglich für den reflectirten Zweig

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = \pm\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(\eta+Y_1)}}$$

oder

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = \pm\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta+\mathfrak{Y}_1)}^{(\eta+Y_1)}},$$

die Vorzeichen nach der bekannten Regel genommen.

Führen wir nun wieder die allgemeinen Symbole der Coordinaten ein, so ist für den directen Zweig:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \mp\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(\eta+Y)}}$$

oder

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \mp\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta+\mathfrak{Y})}^{(\eta+Y)}},$$

und für den reflectirten Zweig:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \pm\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(\eta+Y)}}$$

oder

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \pm\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta+\mathfrak{Y})}^{(\eta+Y)}}.$$

Weil nun allgemein

$$x = \xi + X, \quad y = \eta + Y;$$

also

$$\partial x = \partial X, \; \partial y = \partial Y, \; \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial X}$$

ist; so ist für den directen Zweig:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(r)}},$$

und für den reflectirten Zweig:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)}}.$$

Beide Zweige lassen sich aber auch unter der allgemeinen Gleichung

$$64)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)}},$$

oder für das System der XY unter der allgemeinen Gleichung

$$65)\quad \frac{\partial Y}{\partial X} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta+\mathfrak{Y})}^{(\eta+Y)}}$$

zusammenfassen, wenn man nur festsetzt, dass in diesen Gleichungen die Quadratwurzel für den directen Zweig stets positiv, für den reflectirten Zweig stets negativ genommen werden soll.

Völlig allgemein ist auch für die ganze aus den beiden Zweigen bestehende stetige Curve

$$66)\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)}$$

oder

$$67)\quad \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2 = \omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta+\mathfrak{Y})}^{(\eta+Y)},$$

wobei sich von selbst versteht, dass die zweite dieser beiden Gleichungen überhaupt nur gilt, wenn es einen reflectirten Zweig wirklich giebt, was jederzeit besonders untersucht werden muss.

Durch Differentiation der Gleichung 66) erhält man

$$2\,\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\,\frac{\partial D_{(\eta)}^{(\gamma)}}{\partial x},$$

also

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1\!/_2\,(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 \left\{\frac{\partial D_{(\eta)}^{(\gamma)}}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial x}\right\},$$

d. i.

$$68)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = {}^1\!/_2\,(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 \frac{\partial D_{(\eta)}^{(\gamma)}}{\partial y}.$$

Durch Differentiation der Gleichung 67) ergiebt sich

$$2\,\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}=(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\,\frac{\partial D^{(\eta+Y)}_{(\eta+\mathfrak{Y})}}{\partial X},$$

also

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}=\tfrac{1}{2}(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\left\{\frac{\partial D^{(\eta+Y)}_{(\eta+\mathfrak{Y})}}{\partial X}:\frac{\partial Y}{\partial X}\right\},$$

d. i.

$$69)\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}=\tfrac{1}{2}(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\,\frac{\partial D^{(\eta+Y)}_{(\eta+\mathfrak{Y})}}{\partial Y}.$$

§. 10.

Wenn weder y noch $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ verschwindet, so ist nach der allgemeinen Theorie der Curven *) die Trajectoria in dem Punkte (xy) gegen die horizontale Axe der x concav oder convex, jenachdem y und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben. Weil aber nach 60)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\tfrac{1}{2}(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\,\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y}$$

ist, so kann man dies offenbar auch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn weder y noch $\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y}$ verschwindet, so ist die Trajectoria in dem Punkte (xy) gegen die horizontale Axe der x concav oder convex, jenachdem y und $\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y}$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben, d. h. jenachdem, wenn y zu- oder abnimmt, die Dichtigkeit $\mathfrak{D}_y$ der Luft respective ab- oder zunimmt, oder zu- oder abnimmt.

Ferner leitet man aus der Lehre von der Concavität und Convexität in der allgemeinen Theorie der Curven und aus der Gleichung 60) auch leicht noch die folgenden Sätze ab:

Wenn y verschwindet, aber weder $\frac{\partial y}{\partial x}$, noch $\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y}$

---

*) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Erster Theil. Leipzig. 1837. S. 276 ff.

verschwindet, so ist die Trajectoria in dem Punkte (xy) nach der Seite der positiven x hin concav oder convex, jenachdem $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y}$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

Wenn y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ verschwinden, aber $\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial y}$ nicht verschwindet, so ist die Trajectoria in dem Punkte (xy) nach der Seite der positiven y hin concav oder convex, jenachdem $\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y}$ positiv oder negativ ist.

§. 11.

Nach 64) ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)}},$$

wenn man nur die Quadratwurzel für den directen Zweig positiv, für den reflectirten Zweig negativ nimmt. Also ist

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = (1+\omega^2)\left(1+\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)}\right),$$

und folglich

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= \mp(1+\omega^2)\left(1+\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)}\right)\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)}},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen der Quadratwurzel wie vorher. Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises der Trajectoria in dem Punkte (xy) durch α, β; so ist nach bekannten Formeln aus der Lehre vom Krümmungskreise:

$$70)\quad \begin{cases} \alpha = x \pm \dfrac{2\left(1+\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)}\right)\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)}}}{\overline{\omega}^2 \dfrac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y}}, \\ \beta = y + \dfrac{2\left(1+\overline{\omega}^2 D^{(y)}_{(\eta)}\right)}{\overline{\omega}^2 \dfrac{\partial D^{(y)}_{(\eta)}}{\partial y}}. \end{cases}$$

Weil β von $\omega = tangi$ gar nicht abhängt, so erhellet, dass für alle einen gemeinschaftlichen Ausgangspunkt habende, aber verschiedenen Werthen von i entsprechende Trajectorien die Mittelpunkte der, gleiche zweite Coordinaten habenden und daher in einer der horizontalen Axe der x parallelen geraden Linie liegenden Punkten dieser Trajectorien entsprechenden Krümmungskreise auch sämmtlich in einer der horizontalen Axe der x parallelen geraden Linie liegen, oder dass der geometrische Ort der Mittelpunkte dieser Krümmungskreise jederzeit eine horizontale gerade Linie ist.

Für den Halbmesser ϱ des dem Punkte (xy) der Trajectoria entsprechenden Krümmungskreises erhält man sehr leicht den folgenden Ausdruck:

$$71)\quad \varrho = (\pm)\frac{2(1+\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)})\sqrt{(1+\omega^2)(1+\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)})}}{\overline{\omega}^2 \frac{\partial D_{(y)}^{(y)}}{\partial y}},$$

wo das eingeklammerte Zeichen jederzeit so genommen werden muss, dass ϱ, wie es seiner Natur nach sein muss, eine positive Grösse wird.

Die vorhergehenden Formeln weiter umzugestalten, was nach den obigen Vorbereitungen keine Schwierigkeit haben würde, wollen wir der Kürze wegen unterlassen.

Für die Coordinaten x_1, y_1 der Punkte der Evolute der Trajectoria hat man bekanntlich die Ausdrücke:

$$72)\quad \begin{cases} x_1 = x \pm \dfrac{2(1+\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)})\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)}}}{\overline{\omega}^2 \dfrac{\partial D_{(y)}^{(y)}}{\partial y}}, \\ y_1 = y + \dfrac{2(1+\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)})}{\overline{\omega}^2 \dfrac{\partial D_{(y)}^{(y)}}{\partial y}}; \end{cases}$$

aus welchen zwei Gleichungen man x und y eliminiren muss, um die Gleichung der Evolute zwischen x_1 und y_1 zu erhalten.

§. 12.

Wenn die Gleichung $y = \varphi(x)$ der Trajectoria gegeben ist, so kann man $D_{(\eta)}^{(y)}$ finden. Denn es ist nach 66) in völliger Allgemeinheit

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\,D_{(\eta)}^{(y)},$$

d. i.

$$(\varphi'(x))^2 = \omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\,D_{(\eta)}^{(y)},$$

oder, weil bekanntlich nach 29)

$$\omega = \varphi'(x)$$

ist:

$$(\varphi'(x))^2 = (\varphi'(x))^2 + \{1+(\varphi'(x))^2\}\,\overline{\omega}^2\,D_{(\eta)}^{(y)},$$

also

$$73)\quad D_{(\eta)}^{(y)} = \frac{(\varphi'(x))^2 - (\varphi'(x))^2}{\{1+(\varphi'(x))^2\}\,\overline{\omega}^2},$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\overline{\omega}^2 = \frac{K}{1+K\mathfrak{D}_\eta}$$

ist:

$$74)\quad D_{(\eta)}^{(y)} = \frac{1+K\mathfrak{D}_\eta}{K}\cdot\frac{(\varphi'(x))^2 - (\varphi'(x))^2}{1+(\varphi'(x))^2},$$

durch welche Formel $D_{(\eta)}^{(y)}$ als Function von x dargestellt ist.

Weil bekanntlich

$$\mathfrak{D}_y = \mathfrak{D}_\eta + D_{(\eta)}^{(y)}$$

ist, so ist auch

$$75)\quad \mathfrak{D}_y = \mathfrak{D}_\eta + \frac{1+K\mathfrak{D}_\eta}{K}\cdot\frac{(\varphi'(x))^2 - (\varphi'(x))^2}{1+(\varphi'(x))^2},$$

oder

$$76)\quad \mathfrak{D}_y = \frac{1}{K}\cdot\frac{(\varphi'(x))^2 - (\varphi'(x))^2}{1+(\varphi'(x))^2} + \frac{1+(\varphi'(x))^2}{1+(\varphi'(x))^2}\mathfrak{D}_\eta,$$

oder

$$77)\quad \mathfrak{D}_y = \frac{(\varphi'(x))^2 - (\varphi'(x))^2 + K\{1+(\varphi'(x))^2\}\mathfrak{D}_\eta}{K\{1+(\varphi'(x))^2\}},$$

oder

$$78)\quad \mathfrak{D}_y = \frac{K\mathfrak{D}_\eta - (\varphi'(x))^2 + (1 + K\mathfrak{D}_\eta)(\varphi'(x))^2}{K\{1 + (\varphi'(x))^2\}}.$$

Mittelst dieser Formeln kann man die Dichtigkeit der Luft, und also auch deren Gesetz bestimmen, wenn man die Gestalt der Trajectoria kennt.

Setzt man nach 42)

$$\varphi'(x) = tang\, i,$$

so wird nach dem Vorhergehenden

$$79)\quad D^{(y)}_{(\eta)} = \frac{1 + K\mathfrak{D}_\eta}{K} \cdot \frac{(\varphi'(x))^2 - tang\, i^2}{sec\, i^2},$$

oder

$$80)\quad D^{(y)}_{(\eta)} = -\frac{1 + K\mathfrak{D}_\eta}{K}\{sin\, i^2 - (\varphi'(x))^2 cos\, i^2\}.$$

Ferner ist

$$81)\quad \mathfrak{D}_y = \mathfrak{D}_\eta - \frac{1 + K\mathfrak{D}_\eta}{K}\{sin\, i^2 - (\varphi'(x))^2 cos\, i^2\},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$82)\quad \mathfrak{D}_y = -\frac{sin\, i^2 - K\mathfrak{D}_\eta cos\, i^2}{K} + \frac{1 + K\mathfrak{D}_\eta}{K} cos\, i^2 (\varphi'(x))^2.$$

§. 13.

Wenn, um zu den im vorhergehenden Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln ein Beispiel zu geben, die Trajectoria eine gerade Linie ist, so sei, da sie bekanntlich durch den Punkt $(x\,y)$ geht,

$$83)\quad y - y = a(x - x)$$

ihre Gleichung. Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a, \text{ d. i. } \varphi'(x) = a$$

und folglich auch $\varphi'(x) = a$. Daher ist nach 74)

$$D^{(y)}_{(\eta)} = \frac{1 + K\mathfrak{D}_\eta}{K} \cdot \frac{a^2 - a^2}{1 + a^2},$$

d. i. $D^{(y)}_{(\eta)} = 0$ oder $\mathfrak{D}_y = \mathfrak{D}_\eta$. Also ist unter der Voraussetzung,

dass die Trajectoria eine gerade Linie ist, die Dichtigkeit der Luft constant, und verändert sich daher gar nicht

Wenn, um zu den im vorhergehenden Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln ein zweites Beispiel zu geben, die Trajectoria eine Parabel mit vertikaler Axe ist, deren Axe von ihrem Scheitel aus nach oben, d. h. nach der Seite der positiven y hin liegt; so seien α, β die Coordinaten ihres Scheitels, und p sei ihr Parameter. Dann ist die Gleichung dieser Parabel in Bezug auf ihre Axe, den Scheitel als Anfang der Coordinaten genommen,

$$84)\quad x_1^2 = p y_1.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber

$$x = \alpha + x_1, \quad y = \beta + y_1; \text{ also } x_1 = x - \alpha, \quad y_1 = y - \beta;$$

folglich die Gleichung der Trajectoria im Systeme der xy:

$$85)\quad (x-\alpha)^2 = p(y-\beta),$$

oder

$$86)\quad y - \beta = \frac{(x-\alpha)^2}{p},$$

oder

$$87)\quad y = \beta + \frac{\alpha^2}{p} - \frac{2\alpha}{p}x + \frac{1}{p}x^2,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$88)\quad a = \beta + \frac{\alpha^2}{p}, \quad b = -\frac{2\alpha}{p}, \quad c = \frac{1}{p}$$

setzen:

$$89)\quad y = a + bx + cx^2.$$

Daher ist

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2, \quad \varphi'(x) = b + 2cx;$$

also

$$\varphi'(x) = b + 2cx,$$

und folglich nach 73)

$$D_{(\eta)}^{(y)} = \frac{(b+2cx)^2 - (b+2cx)^2}{\omega^2\{1+(b+2cx)^2\}}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}(b+2cx)^2 - (b+2cx)^2 &= 4c(bx+cx^2) - 4c(bx+cx^2)\\ &= 4c(a+bx+cx^2) - 4c(a+bx+cx^2)\\ &= 4c(y-y),\end{aligned}$$

also

$$90)\quad D_{(\eta)}^{(y)} = \frac{4c(y-y)}{\overline{\omega}^2\{1+(b+2cx)^2\}}$$

oder

$$91)\quad D_{(\eta)}^{(y)} = \frac{4c(1+K\mathfrak{D}_\eta)}{K\{1+(b+2cx)^2\}}(y-y).$$

Auch ist

$$1+(b+2cx)^2$$
$$= 1+b^2+4bcx+4c^2x^2 = 1+b^2-4ac+4cy,$$

und daher

$$92)\quad D_{(\eta)}^{(y)} = \frac{4c(y-y)}{\overline{\omega}^2(1+b^2-4ac+4cy)},$$

oder

$$93)\quad D_{(\eta)}^{(y)} = \frac{4c(1+K\mathfrak{D}_\eta)}{K(1+b^2-4ac+4cy)}(y-y).$$

Ferner ist auch nach 88)

$$b+2cx = -\frac{2\alpha}{p}+\frac{2x}{p} = \frac{2(x-\alpha)}{p},$$

also

$$1+(b+2cx)^2 = \frac{4(x-\alpha)^2+p^2}{p^2},$$

und folglich

$$\frac{4c}{1+(b+2cx)^2} = \frac{4p}{4(x-\alpha)^2+p^2} = \frac{p}{(x-\alpha)^2+{}^1/_4p^2};$$

also

$$94)\quad D_{(\eta)}^{(y)} = \frac{p(y-y)}{\overline{\omega}^2\{(x-\alpha)^2+{}^1/_4p^2\}},$$

oder

$$95)\quad D_{(\eta)}^{(y)} = \frac{p(1+K\mathfrak{D}_\eta)}{K\{(x-\alpha)^2+{}^1/_4p^2\}}(y-y).$$

Bezeichnen wir nun das Stück der Normale der Trajectoria im Ausgangspunkte $(x\,y)$ des Strahls, welches zwischen diesem Punkte und der Axe der Parabel liegt, durch N, so ist nach der Lehre von der Parabel offenbar

$$N^2 = (x-\alpha)^2+{}^1/_4p^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$96)\quad D_{(\eta)}^{(\gamma)} = \frac{p}{\varpi^2 N^2}\,(y - \mathfrak{y})$$

oder

$$97)\quad D_{(\eta)}^{(\gamma)} = \frac{p(1 + K\mathfrak{D}_\eta)}{KN^2}\,(y - \mathfrak{y}),$$

woraus das Gesetz der Veränderung der Dichtigkeit der Luft ohne Weiteres erhellet.

Wenn die Trajectoria eine Parabel mit vertikaler Axe ist, deren Axe von ihrem Scheitel aus nach unten, d. h. nach der Seite der negativen y hin liegt, und wie vorher α, β die Coordinaten des Scheitels sind, p aber wieder den Parameter bezeichnet, so ist in Bezug auf die Axe, den Scheitel als Anfang der Coordinaten genommen, ihre Gleichung

$$98)\quad x_1^2 = -\,p y_1.$$

Hieraus sieht man, dass dieser Fall auf der Stelle aus dem vorhergehenden erhalten wird, wenn man überall $-p$ statt p setzt.

§. 14.

Wenn $D_{(\eta)}^{(\gamma)}$ als Function von y gegeben ist und die Gleichung der Trajectoria gefunden werden soll, so muss man sich auf folgende Art verhalten, wobei wir die im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen sämmtlich beibehalten.

Für den directen Zweig ist nach dem Obigen bekanntlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1 + \omega^2)\,\varpi^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, also

$$\partial x = \mp \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1 + \omega^2)\,\varpi^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)}}},$$

und folglich

$$x = \mp \int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1 + \omega^2)\,\varpi^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)}}} + Const.$$

Setzt man nun überhaupt

$$F(y) = \int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1 + \omega^2)\,\varpi^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)}}},$$

so ist

$$x = \mp F(y) + Const.$$

Da der Ausgangspunkt (xy) des Strahls jedenfalls im directen Zweige liegt, so ist

$$x = \mp F(y) + Const.,$$

also

$$x - x = \mp \{F(y) - F(y)\}$$

oder

$$x = x \mp \{F(y) - F(y)\},$$

d. i.

$$99)\quad x = x \mp \int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)}}}.$$

Insofern es nun einen reflectirten Zweig wirklich giebt, was jederzeit besonders untersucht werden muss, seien wie früher ξ, η die Coordinaten des Punktes, in welchem die Luftspiegelung Statt findet, oder des Scheitels der Trajectoria, und x', y' seien die Coordinaten eines beliebigen Punktes im reflectirten Zweige, so ist offenbar, wenn $y = y'$ ist, wegen der gegenseitigen symmetrischen Lage des directen und des reflectirten Zweiges, nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie:

$$\xi = \tfrac{1}{2}(x + x'), \text{ also } x' = 2\xi - x;$$

und folglich nach 99) für den reflectirten Zweig:

$$x' = 2\xi - x \pm \int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)}}},$$

oder, wenn wir wieder x für x' schreiben:

$$100)\quad x = 2\xi - x \pm \int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)}}},$$

die Quadratwurzel immer positiv genommen.

Auch ist für den directen Zweig:

$$101)\quad x = \xi - \{\xi - x \pm \int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)}}}\},$$

und für den reflectirten Zweig:

$$102)\quad x = \xi + \{\xi - x \pm \int_{\eta}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)}}}\Big\}.$$

Setzt man

$$103)\quad \psi(y) = \xi - x \pm \int_{\eta}^{y} \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(\eta)}^{(\gamma)}}},$$

so ist für den directen Zweig:

$$x = \xi - \psi(y),$$

und für den reflectirten Zweig:

$$x = \xi + \psi(y).$$

Weil nun

$$\{x-(\xi-\psi(y))\}\{x-(\xi+\psi(y))\}$$
$$=\{x-\xi+\psi(y)\}\{x-\xi-\psi(y)\}$$
$$=(x-\xi)^2-\{\psi(y)\}^2$$
$$=x^2-2\xi x+\xi^2-\{\psi(y)\}^2$$

ist, so ist klar, dass sich beide Zweige der Trajectoria in der einen Gleichung

$$104)\quad x^2 - 2\xi x + \xi^2 - \{\psi(y)\}^2 = 0,$$

wo für $\psi(y)$ sein obiger Werth gesetzt werden muss, zusammenfassen lassen.

Die in den vorhergehenden Gleichungen vorkommende Grösse ξ muss auf folgende Art bestimmt werden.

Zuerst bestimme man η aus der sich unmittelbar aus §. 8. oder §. 9. ergebenden Gleichung

$$105)\quad D_{(\eta)}^{(\eta)} = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2} = -\frac{1+K\mathfrak{D}_{\eta}}{K}\cdot\frac{\omega^2}{1+\omega^2}$$

oder

$$106)\quad D_{(\eta)}^{(\eta)} = -\frac{\sin i^2}{\overline{\omega}^2} = -\frac{1+K\mathfrak{D}_{\eta}}{K}\sin i^2.$$

Den auf diese Weise gefundenen Werth von η führe man für y in die nach dem Vorhergehenden entwickelte Gleichung des directen Zweigs ein, und bestimme dann aus derselben die Grösse x, deren auf diese Weise gefundener Werth der gesuchte Werth von

ξ sein wird, welchen man nun in die obige Gleichung des reflectirten Zweigs einführen, und dadurch auch diese Gleichung in völlig entwickelter Gestalt darstellen kann. Jenachdem die Bestimmung von ξ und η nach der vorhergehenden Anweisung bloss in reellen Grössen möglich oder unmöglich ist, wird es einen reflectirten Zweig wirklich geben oder nicht.

§. 15.

Wenn jetzt (uv) der Ort des Auges des Beobachters ist, und dasselbe von der Trajectoria getroffen, der Punkt (xy) also von dem Auge gesehen werden soll, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem das Auge von dem directen Zweige oder von dem reflectirten Zweige, insofern es einen solchen giebt, getroffen werden soll, wobei man nicht unbeachtet zu lassen hat, dass nur im letzten Falle das Auge die Erscheinung, welche man Luftspiegelung zu nennen pflegt, wirklich sieht, wie aus dem Vorhergehenden von selbst erhellet.

Soll aber das Auge (uv) von dem directen Zweige getroffen werden, so muss der Punkt (uv) in diesem Zweige liegen, welches nach 99) durch die Gleichung

$$107)\quad u = x \mp \int_y^v \frac{\partial v}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(v)}^{(v)}}}$$

bedingt wird; aus dieser Gleichung muss man die Grösse

$$108)\quad \omega = \varphi'(x) = tang\, i$$

bestimmen, und den gefundenen Werth dann in die Gleichung

$$109)\quad x = x \mp \int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)}}}$$

einführen, oder mit andern Worten: es muss aus den beiden Gleichungen

$$110)\quad \begin{cases} u = x \mp \int_y^v \frac{\partial v}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(v)}^{(v)}}}, \\ x = x \mp \int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(y)}^{(y)}}} \end{cases}$$

die Grösse ω eliminirt werden, wodurch man die Gleichung des

durch das Auge (uv) gehenden directen Zweigs zwischen x und y erhält; weil aber den Werth von ω selbst zu kennen, immer wichtig und interessant ist, so wird das erste Verfahren meistens vorzuziehen sein.

Soll ferner das Auge von dem reflectirten Zweige, insofern es, was jederzeit vorher gehörig festgestellt sein muss, einen solchen wirklich giebt, getroffen werden, so muss der Punkt (uv) in diesem Zweige liegen, was nach 100) durch die Gleichung

$$111)\quad u = 2\xi - x \pm \int_y^v \frac{\partial v}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(v)}}}$$

bedingt wird; aus dieser Gleichung muss man die Grösse

$$108^*)\quad \omega = \varphi'(x) = tang\, i$$

bestimmen, und den gefundenen Werth dann in die Gleichung

$$112)\quad x = 2\xi - x \pm \int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(y)}}}$$

einführen, oder mit anderen Worten: es muss aus den beiden Gleichungen

$$113)\quad \begin{cases} u = 2\xi - x \pm \int_y^v \dfrac{\partial v}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(v)}}}, \\ x = 2\xi - x \pm \int_y^y \dfrac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(y)}}} \end{cases}$$

die Grösse ω eliminirt werden, wodurch man die Gleichung des durch das Auge (uv) gehenden reflectirten Zweigs zwischen x und y erhält; jedoch wird aus dem oben angegebenen Grunde auch in diesem Falle das erste Verfahren meistens vorzuziehen sein.

Die Gleichung der durch das Auge (uv) gehenden Berührenden der Trajectoria, durch welche die Richtung bestimmt wird, nach der das Auge den Punkt (xy) sieht, ist bekanntlich

$$y - v = \frac{\partial v}{\partial u}\,(x - u).$$

Liegt nun (uv) im directen Zweige, so ist bekanntlich nach 64)

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D_{(\eta)}^{(v)}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, also die Gleichung der Berührenden im Punkte (uv):

$$114)\quad y - v = \mp \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\varpi^2 D^{(v)}_{(\eta)}}\,.\,(x-u),$$

wo natürlich für ω sein nach dem Vorhergehenden bestimmter Werth gesetzt werden muss. Liegt dagegen (uv) im reflectirten Zweige, so ist nach 64)

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \pm \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\varpi^2 D^{(v)}_{(\eta)}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, also die Gleichung der Berührenden

$$115)\quad y - v = \pm \sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\varpi^2 D^{(v)}_{(\eta)}}\,.\,(x-u),$$

wo wieder für ω sein nach dem Vorhergehenden bestimmter Werth gesetzt werden muss.

§. 16.

Wenn die Gleichung des Strahls jetzt ganz im Allgemeinen durch

$$116)\quad y = F(\omega, x)$$

dargestellt wird, so wollen wir nun die Gleichung aller orthogonalen Trajectorien der Strahlen für den veränderlichen Parameter ω suchen.

Der Punkt (xy) sei ein dem Strahle für den Parameter ω und der orthogonalen Trajectoria gemeinschaftlicher Punkt, so sind, wenn wir die Gleichung der orthogonalen Trajectoria, welche natürlich von ω unabhängig ist, durch

$$117)\quad y = \mathfrak{S}(x)$$

bezeichnen, die Gleichungen der Berührenden des Strahls und der orthogonalen Trajectoria in dem Punkte (xy) respective

$$118)\quad Y - y = \frac{\partial_x F(\omega, x)}{\partial x}\,(X-x),$$

und

$$119)\quad Y - y = \mathfrak{S}'(x).(X-x),$$

wo die veränderlichen oder laufenden Coordinaten jetzt durch X, Y bezeichnet worden sind, und weil nun diese Berührenden auf einander senkrecht stehen müssen, so hat man nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichung

$$120)\quad 1 + \frac{\partial_x F(\omega, x)}{\partial x} \cdot \mathfrak{S}'(x) = 0.$$

Verbindet man mit dieser Gleichung die aus 116) und 117), weil der Punkt (xy) beiden Curven angehören soll, sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$121)\quad \mathfrak{S}(x) = F(\omega, x),$$

und eliminirt dann aus den beiden Gleichungen

$$122)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}(x) = F(\omega, x), \\ 1 + \dfrac{\partial_x F(\omega, x)}{\partial x} \cdot \mathfrak{S}'(x) = 0 \end{cases}$$

den veränderlichen Parameter ω, so erhält man uine Gleichung zwischen x, $\mathfrak{S}(x)$, $\mathfrak{S}'(x)$ oder zwischen x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, welche die allgemeine Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der Strahlen für den veränderlichen Parameter ω ist, die man nun integriren muss, um zu der allgemeinen Gleichung dieser orthogonalen Trajectorien selbst zu gelangen.

Man denke sich nun durch den Punkt (uv) des dem Parameter ω entsprechenden Strahls eine orthogonale Trajectoria gelegt, und lasse $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ einen andern beliebigen Punkt dieser orthogonalen Trajectoria sein, so sind nach den Principien der analytischen Geometrie

$$Y - v = -\frac{1}{\mathfrak{S}'(u)}(X - u)$$

und

$$Y - (v + \Delta v) = -\frac{1}{\mathfrak{S}'(u + \Delta u)}\{X - (u + \Delta u)\}$$

die Gleichungen der Normalen der orthogonalen Trajectoria in den beiden genannten Punkten. Bestimmt man aber aus diesen beiden Gleichungen X und Y als unbekannte Grössen nach den Regeln der

gewöhnlichen algebraischen Elimination, so erhält man die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden in Rede stehenden Normalen. Durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten ergiebt sich zuvörderst

$$\Delta v = -\left\{\frac{1}{\mathfrak{S}'(u)} - \frac{1}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}\right\} X + \frac{u}{\mathfrak{S}'(u)} - \frac{u+\Delta u}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)},$$

also

$$X = -\frac{\Delta v - \frac{u}{\mathfrak{S}'(u)} + \frac{u+\Delta u}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}}{\frac{1}{\mathfrak{S}'(u)} - \frac{1}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}},$$

und folglich

$$X - u = -\frac{\Delta v + \frac{\Delta u}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}}{\frac{1}{\mathfrak{S}'(u)} - \frac{1}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u)}},$$

oder

$$123)\quad \begin{cases} X - u = -\mathfrak{S}'(u) \cdot \dfrac{\Delta u + \mathfrak{S}'(u+\Delta u) \cdot \Delta v}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u) - \mathfrak{S}'(u)}, \\ Y - v = \dfrac{\Delta u + \mathfrak{S}'(u+\Delta u) \cdot \Delta v}{\mathfrak{S}'(u+\Delta u) - \mathfrak{S}'(u)}. \end{cases}$$

Nun ist aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\mathfrak{S}'(u+\Delta u) = \mathfrak{S}'(u) + \mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u) \cdot \Delta u^2,$$

wo Θ bekanntlich eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet; also

$$124)\quad \begin{cases} X - u = -\mathfrak{S}'(u) \cdot \dfrac{\Delta u + \mathfrak{S}'(u) \cdot \Delta v + \mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u \Delta v + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u) \cdot \Delta u^2 \Delta v}{\mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u) \cdot \Delta u^2}, \\ Y - v = \dfrac{\Delta u + \mathfrak{S}'(u) \cdot \Delta v + \mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u \Delta v + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u) \cdot \Delta u^2 \Delta v}{\mathfrak{S}''(u) \cdot \Delta u + {}^1/_2 \mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u) \cdot \Delta u^2}; \end{cases}$$

oder

$$125)\begin{cases} X-u = -\mathfrak{S}'(u).\dfrac{1+\mathfrak{S}'(u).\dfrac{\Delta v}{\Delta u}+\mathfrak{S}''(u).\Delta v+{}^1/_2\mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u).\Delta u\Delta v}{\mathfrak{S}''(u)+{}^1/_2\mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u).\Delta u}, \\ Y-v = \dfrac{1+\mathfrak{S}'(u).\dfrac{\Delta v}{\Delta u}+\mathfrak{S}''(u).\Delta v+{}^1/_2\mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u).\Delta u\Delta v}{\mathfrak{S}''(u)+{}^1/_2\mathfrak{S}'''(u+\Theta\Delta u).\Delta u}. \end{cases}$$

Denken wir uns jetzt die Oberfläche des in dem Punkte (uv) befindlichen Auges des Beobachters als einen unendlich kleinen Theil der in Rede stehenden Trajectoria, so wird dasselbe von den einander unendlich nahe liegenden Normalen dieser Trajectoria, welche natürlich Berührende der von dem Punkte (xy) ausgegangenen, dem veränderlichen Parameter ω entsprechenden Strahlen sind, unter rechten Winkeln getroffen, und da nun das Auge hiernach den Punkt (xy) offenbar in den Punkt zu versetzen geneigt sein wird, in welchem diese einander unendlich nahe liegenden Normalen sich schneiden, — eine Ansicht, in welcher wir an Gergonne in seiner Abhandlung: Essai analytique sur le phénomène du mirage in den Annales de Mathématiques. T. XX. p. 16. uns anschliessen, — so wird das Auge offenbar den Punkt (xy) in den Punkt versetzen oder in dem Punkte zu erblicken glauben, dessen Coordinaten die Gränzen sind, denen X, Y sich nähern, wenn man Δu sich der Null nähern lässt. Die Coordinaten dieses Punktes, den wir das Bild des Punktes (xy) nennen werden, wollen wir durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ bezeichnen, und nun zu bestimmen suchen.

Weil zuvörderst die Gränze, welcher $\dfrac{\Delta v}{\Delta u}$ sich nähert, wenn Δu sich der Null nähert, nach den Principien der Differentialrechnung

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial \mathfrak{S}(u)}{\partial u} = \mathfrak{S}'(u)$$

ist; so ist nach 125) offenbar

$$126)\begin{cases} \mathfrak{X}-u = -\mathfrak{S}'(u).\dfrac{1+(\mathfrak{S}'(u))^2}{\mathfrak{S}''(u)}, \\ \mathfrak{Y}-v = \dfrac{1+(\mathfrak{S}'(u))^2}{\mathfrak{S}''(u)}. \end{cases}$$

Nun müssen aber $\mathfrak{S}'(u)$ und $\mathfrak{S}''(u)$ gesucht und in diese Gleichungen eingeführt werden, wobei wir uns an die aus 122) sich unmittelbar ergebenden Gleichungen

$$\mathfrak{S}(u) = F(\omega, u),$$

$$1 + \frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u} \cdot \mathfrak{S}'(u) = 0$$

anschliessen müssen.

Aus der zweiten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich unmittelbar

$$\mathfrak{S}'(u) = -\frac{1}{\frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}}.$$

Aus der Gleichung

$$\mathfrak{S}(u) = F(\omega, u),$$

in der man ω als Function von u zu betrachten hat, folgt nach bekannten Regeln der Differentialrechnung *):

$$\mathfrak{S}'(u) = \frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u} + \frac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u},$$

und hieraus ferner

$$\mathfrak{S}''(u)$$

$$= \frac{\partial^2{}_u F(\omega, u)}{\partial u^2} + 2\frac{\partial \omega\, \partial_u F(\omega, u)}{\partial \omega\, \partial u} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial^2{}_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega^2} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{S}'(u) = -\frac{1}{\frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}}$$

und

$$\mathfrak{S}'(u) = \frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u} + \frac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

erhält man, wenn die beiden Werthe von $\mathfrak{S}'(u)$ einander gleich gesetzt werden, mittelst leichter Rechnung

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = -\frac{1 + \left(\frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}\right)^2}{\frac{\partial_\omega F(\omega, u)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u}}.$$

Nun ist

*) A. a. O. S. 182.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \frac{\partial_u \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial u} + \frac{\partial_\omega \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}.$$

Nach dem vorhergehenden Ausdrucke von $\frac{\partial \omega}{\partial u}$ ist von

$$\frac{\partial_u \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial u}$$

der Zähler:

$$-2\,\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega}\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial^2{}_u F(\omega,u)}{\partial u^2}+\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega\,\partial u}\right\}$$

$$=-\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega}\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega\,\partial u}$$

$$+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3\cdot\frac{\partial_\omega \partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial \omega\,\partial u},$$

und der Nenner ist

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2.$$

Von

$$\frac{\partial_\omega \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial u}$$

ist der Zähler:

$$-2\,\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega}\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega\,\partial u}$$

$$+\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial \omega^2}+\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega\,\partial u}\right\}$$

$$=-\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega}\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial \omega\,\partial u}$$

$$+\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2}$$

$$+\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}$$

$$+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2},$$

und der Nenner ist wieder

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2.$$

Die Zähler von

$$\frac{\partial_u\frac{\partial\omega}{\partial u}}{\partial u}\quad\text{und}\quad\frac{\partial_\omega\frac{\partial\omega}{\partial u}}{\partial\omega}$$

sind auch respective

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}$$

und

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2}\right.,$$

und der gemeinschaftliche Nenner ist

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2.$$

Also ist nach dem Obigen, wie leicht erhellen wird, der Zähler von $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}$:

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}$$

$$-\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}$$

$$-\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}^2\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2},$$

und der Nenner ist

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3\cdot$$

Folglich ist nach dem Obigen von $\mathfrak{S}''(u)$ der Zähler:

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3\cdot\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$-2\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\cdot\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}$$

$$+\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}^2\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2}$$

$$+\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$+\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\cdot\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}$$

$$-\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\left\{1-\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}$$

$$-\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}^2\cdot\frac{\partial_\omega{}^2 F(\omega,u)}{\partial\omega^2},$$

d. i., wie man sogleich übersieht:

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}$$

$$-\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^2\cdot\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\cdot\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u};$$

und der Nenner ist

$$\left(\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\right)^3\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\Bigg)^3;$$

also

$$\mathfrak{S}''(u)$$

$$=\frac{\dfrac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}-\left\{1+\left(\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\cdot\dfrac{\partial_\omega\partial_u F(\omega\,u)}{\partial\omega\,\partial u}}{\dfrac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\left(\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^3}.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke von $\mathfrak{S}'(u)$ und $\mathfrak{S}''(u)$ in die Ausdrücke 126) von $\mathfrak{x}-u$, $\mathfrak{y}-v$ ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$127)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}-u = \dfrac{\dfrac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1+\left(\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}}{\dfrac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}-\left\{1+\left(\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\dfrac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}}, \\ \mathfrak{y}-v = \dfrac{\dfrac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}}{\dfrac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2}-\left\{1+\left(\dfrac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\dfrac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}}; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ des Bildes bestimmt werden können.

Handelt es sich um das Bild nicht eines blossen Punktes, sondern eines ausgedehnten Objects, etwa einer Linie, um nur diesen einfachsten Fall in's Auge zu fassen, so hat man zwischen den beiden Coordinaten x, y eine Gleichung, z. B. im Falle einer geraden Linie eine Gleichung von der Form $y = mx + n$, wo m und n bekannte Grössen sind. Aus dieser Gleichung, aus der zur Bestimmung von ω dienenden Gleichung (m. s. 30)), und aus den zur Bestimmung von $\mathfrak{X} - u$, $\mathfrak{Y} - v$ dienenden Gleichungen (m. s. 127)) kann man nun, da dies vier Gleichungen zwischen den drei Grössen ω, x, y sind, diese drei Grössen ganz eliminiren, und die resultirende Gleichung zwischen $\mathfrak{X} - u$, $\mathfrak{Y} - v$ oder $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ ist die Gleichung des Bildes der gegebenen Linie, welche man suchte. Die erforderlichen näheren Bestimmungen werden sich in besonderen Fällen leicht ergeben; die betreffenden Rechnungen werden aber meistens ziemlich complicirt ausfallen.

§. 17.

Nach diesen allgemeinen Entwickelungen wollen wir nun den Fall, wenn

$$D_{(\eta)}^{(\gamma)} = c(y - \mathfrak{y})$$

ist, wo c eine constante Grösse bezeichnet, einer ausführlichen Betrachtung unterwerfen.

Dabei kommt es, wie sich aus dem Obigen ergiebt, zuerst auf die allgemeine Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 (y - \mathfrak{y})}}$$

an. Zu dem Ende setze man

$$Y = \sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 (y - \mathfrak{y})},$$

also

$$Y^2 = \omega^2 \overline{\omega}^2 + c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 (y - \mathfrak{y}),$$

so ist

$$2Y\partial Y = c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 \partial y,$$

und folglich

$$\partial y = \frac{2Y\partial Y}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2},$$

also

$$\frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 (y - \mathfrak{y})}} = \frac{2\partial Y}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

woraus sogleich

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2(y-y)}} = \frac{2Y}{c(1+\omega^2)\varpi^2},$$

d. i.

$$128) \int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2(y-y)}} = \frac{2\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2(y-y)}}{c(1+\omega^2)\varpi^2}$$

folgt. Nimmt man nun dieses Integral von y bis y, so wird

$$129) \int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2(y-y)}}$$

$$= \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2(y-y)} - \sqrt{\omega^2}\right\},$$

wo ganz absichtlich $\sqrt{\omega^2}$ nicht weiter entwickelt, d. h. etwa durch ω dargestellt worden ist, weil $\sqrt{\omega^2}$ nothwendig positiv genommen werden muss, wie man aus dem Obigen weiss, die Grösse $\omega = \varphi'(x) = tang\, i$ aber keineswegs immer positiv ist, sondern auch negativ sein kann, wenn nämlich i negativ ist.

Führt man den Werth $tang\, i$ für ω in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$\int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2(y-y)}}$$

$$= \frac{2}{c\varpi^2 sec\, i^2}\left\{\sqrt{tang\, i^2 + c\varpi^2 sec\, i^2(y-y)} - \sqrt{tang\, i^2}\right\},$$

d. i., weil $cos\, i$ stets positiv ist, da i nicht grösser als 90^0 rücksichtlich seines absoluten Werths ist:

$$130) \int_y^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2(y-y)}}$$

$$= \frac{2\, cos\, i}{c\varpi^2}\left\{\sqrt{sin\, i^2 + c\varpi^2(y-y)} - \sqrt{sin\, i^2}\right\}.$$

§. 18.

Die Gleichung des directen Zweigs ist folglich nach 99)

$$131)\ x = x \mp \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2(y-y)} - \sqrt{\omega^2}\right\}$$

oder

$$132)\quad x = x \mp \frac{2\cos i}{c\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\sin i^2 + c\,\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})} - \sqrt{\sin i^2}\right\}.$$

Um ferner die Gleichung des reflectirten Zweigs zu erhalten, muss man zuerst η aus der Gleichung

$$D_{(\eta)}^{(\eta)} = c(\eta - \mathfrak{y}) = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

bestimmen, woraus sich

$$133)\quad \eta - \mathfrak{y} = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

ergiebt. Führt man dies in den Ausdruck 131) von x für $y-\mathfrak{y}$ ein, so erhält man

$$134)\quad \xi = x \pm \frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2},$$

und für den reflectirten Zweig ergiebt sich daher nach 100) die Gleichung

$$x = x \pm \frac{4\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2} \pm \frac{2}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})} - \sqrt{\omega^2}\right\},$$

d. i.

$$135)\quad x = x \pm \frac{2}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})} + \sqrt{\omega^2}\right\}$$

oder

$$136)\quad x = x \pm \frac{2\cos i}{c\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\sin i^2 + c\,\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})} + \sqrt{\sin i^2}\right\}.$$

Für beide Zweige zusammen hat man nach 104) die Gleichung

$$137)\quad \left\{x - x \mp \frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\right\}^2 = \frac{4\left\{\omega^2 + c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2(y-\mathfrak{y})\right\}}{c^2(1+\omega^2)^2\,\overline{\omega}^4}.$$

Nimmt man den Punkt $(\xi\eta)$ als Anfang eines dem primitiven Systeme der xy parallelen Systems der $x_1 y_1$ an, so ist

$$x = \xi + x_1,\quad y = \eta + y_1 \text{ oder } x_1 = x - \xi,\quad y_1 = y - \eta;$$

also ist für den directen Zweig nach dem Obigen

$$138)\quad x_1 = \mp \frac{2}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\sqrt{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 y_1},$$

und für den reflectirten Zweig ist

$$139)\quad x_1 = \pm \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\sqrt{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 y_1}.$$

Für beide Zweige zusammen ist folglich

$$140)\quad x_1^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2} y_1 = \frac{4\cos i^2}{c\overline{\omega}^2} y_1,$$

woraus sich ergiebt, dass die Trajectoria eine Parabel ist. Die primitiven Coordinaten des Scheitels dieser Parabel sind:

$$141)\quad \begin{cases} \xi = x \pm \dfrac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}, \\ \eta = y - \dfrac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}. \end{cases}$$

Wenn c positiv ist, so ist der Parameter

$$\frac{4}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2} = \frac{4\cos i^2}{c\overline{\omega}^2};$$

wenn dagegen c negativ ist, so ist der Parameter

$$-\frac{4}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2} = -\frac{4\cos i^2}{c\overline{\omega}^2}.$$

Wenn c positiv ist, so ist x_1 nur für positive y_1 reell; also kehrt in diesem Falle die Parabel ihre concave Seite nach oben. Wenn dagegen c negativ ist, so ist x_1 nur für negative y_1 reell; also kehrt in diesem Falle die Parabel ihre concave Seite nach unten.

Weil nach dem Obigen

$$\eta - y = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

und folglich $\eta - y$ negativ oder positiv ist, jenachdem c positiv oder negativ ist, so liegt der Scheitel der Parabel auf der negativen oder positiven Seite einer durch den Ausgangspunkt $(x\,y)$ des Strahls gezogenen horizontalen Linie, jenachdem c positiv oder negativ ist.

Für $x = y = 0$ ist die Gleichung des directen Zweigs:

$$142)\quad x = \mp \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 y} - \sqrt{\omega^2}\right\},$$

und die Gleichung des reflectirten Zweigs ist unter derselben Voraussetzung:

$$143)\quad x = \pm \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 y} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Für beide Zweige ist, wie man hieraus leicht findet:

$$144)\quad x^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\,(y \pm x\sqrt{\omega^2}).$$

Von nun an wollen wir der Kürze und Einfachheit wegen immer $x = 0$, $y = 0$ setzen, d. h. wir wollen den Ausgangspunkt des Strahls als Anfang der Coordinaten annehmen.

§. 19.

Nach 141) sind unter der am Ende des vorhergehenden Paragraphen gemachten Voraussetzung die Coordinaten des Scheitels der Parabel:

$$\xi = \pm \frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},\quad \eta = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}.$$

Um aus diesen beiden Gleichungen ω zu eliminiren, hat man zuerst

$$\frac{\eta}{\xi} = \mp\, {}^1/_2\sqrt{\omega^2},$$

also

$${}^1/_4\,\omega^2 = \frac{\eta^2}{\xi^2},\quad \omega^2 = \frac{4\eta^2}{\xi^2},\quad 1+\omega^2 = \frac{\xi^2+4\eta^2}{\xi^2}.$$

Folglich ist

$$\eta = -\frac{4}{c\overline{\omega}^2}\cdot\frac{\eta^2}{\xi^2}\cdot\frac{\xi^2}{\xi^2+4\eta^2},$$

d. i.

$$\frac{4}{c\overline{\omega}^2}\cdot\frac{\eta}{\xi^2+4\eta^2} = -1,$$

oder

$$c\overline{\omega}^2(\xi^2+4\eta^2) = -4\eta.$$

Also ist

$$c\overline{\omega}^2\xi^2 + 4c\overline{\omega}^2\left(\eta^2 + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\,\eta\right) = 0,$$

und folglich

$$c\overline{\omega}^2\xi^2 + 4c\overline{\omega}^2\left(\eta^2 + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\eta + \frac{1}{4c^2\overline{\omega}^4}\right) = \frac{1}{c\overline{\omega}^2},$$

d. i.

$$c\overline{\omega}^2\xi^2 + 4c\overline{\omega}^2\left(\eta + \frac{1}{2c\overline{\omega}^2}\right)^2 = \frac{1}{c\overline{\omega}^2},$$

oder

$$c^2\overline{\omega}^4\xi^2 + 4c^2\overline{\omega}^4\left(\eta + \frac{1}{2c\overline{\omega}^2}\right)^2 = 1,$$

oder

$$145)\quad \left(\frac{\xi}{\frac{1}{c\overline{\omega}^2}}\right)^2 + \left(\frac{\eta + \frac{1}{2c\overline{\omega}^2}}{\frac{1}{2c\overline{\omega}^2}}\right)^2 = 1,$$

oder, wenn wir

$$146)\quad \xi = \xi_1,\ \eta + \frac{1}{2c\overline{\omega}^2} = \eta_1$$

und

$$147)\quad a = \frac{1}{c\overline{\omega}^2}$$

setzen:

$$148)\quad \left(\frac{\xi_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\frac{1}{2}a}\right)^2 = 1,$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist, deren beide Halbaxen die absoluten Werthe von

$$a = \frac{1}{c\overline{\omega}^2} \text{ und } \frac{1}{2}a = \frac{1}{2c\overline{\omega}^2}$$

sind. Weil

$$\xi = \xi_1,\quad \eta = -\frac{1}{2c\overline{\omega}^2} + \eta_1$$

ist, so sind $0, -\frac{1}{2c\overline{\omega}^2}$ die primitiven Coordinaten des Mittelpunkts dieser Ellipse; ihre Hauptaxe ist horizontal, ihre Nebenaxe ist vertikal, und weil nach 145) gleichzeitig $\xi = 0$, $\eta = 0$ ist, so geht sie immer durch den Anfang der Coordinaten, d. h. durch den Ausgangspunkt des Strahls.

Die so eben näher bestimmte Ellipse ist der geometrische Ort der Scheitel aller derjenigen Parabeln, welche, denselben Ausgangs-

punkt habend, erhalten werden, wenn man sich $\omega = tang\, i$ oder i stetig verändern lässt, indem

$$\overline{\omega}^2 = \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_0}$$

ungeändert bleibt. Diese Ellipse soll im Folgenden die Scheitelellipse genannt werden.

Durch Elimination von $\overline{\omega}^2$ haben wir oben die Gleichung

$$\frac{\eta}{\xi} = \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\overline{\omega^2}} \text{ oder } \eta = \mp \tfrac{1}{2}\xi\sqrt{\overline{\omega^2}}$$

erhalten, in welcher man, wie immer, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt; weil aber $\omega = tang\, i$ bekanntlich negativ oder positiv ist, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt, so kann man offenbar kürzer und in völliger Allgemeinheit setzen:

$$149)\quad \eta = \tfrac{1}{2}\xi\omega = \tfrac{1}{2}\xi\, tang\, i,$$

welches die Gleichung einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten oder den Ausgangspunkt des Strahls gehenden geraden Linie ist. Diese gerade Linie ist der geometrische Ort der Scheitel aller derjenigen Parabeln, welche, denselben Ausgangspunkt habend, erhalten werden, wenn man sich

$$\overline{\omega}^2 = \frac{K}{1 + K\mathfrak{D}_0},$$

d. i. die Dichtigkeit $\mathfrak{D}_0$ der Luft im Ausgangspunkte des Strahls, stetig verändern lässt, indem i ungeändert bleibt.

§. 20.

Die allgemeine Gleichung der Parabel war nach 144)

$$x^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\,(y \pm x\sqrt{\omega^2}),$$

und in dieser Gleichung hat man das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt; weil aber $\omega = tang\, i$ bekanntlich negativ oder positiv ist, jenachdem der Strahl aus den oberen in die unteren oder aus den unteren in die oberen Schichten tritt, so kann man offenbar in völliger Allgemeinheit und kürzer

$$150)\quad x^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}(y - \omega x)$$

oder

$$151)\quad x^2 = \frac{4\cos i^2}{c\overline{\omega}^2}(y - x\,tang\,i)$$

setzen.

Soll nun der Strahl durch das Auge $(u\,v)$ gehen oder dasselbe von dem Strahle getroffen werden, so hat man die Bedingungsgleichung

$$u^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}(v - \omega u),$$

oder

$$(1+\omega^2)u^2 = \frac{4}{c\overline{\omega}^2}(v - \omega u),$$

oder

$$\omega^2 + \frac{4}{c\overline{\omega}^2 u}\omega = \frac{4v}{c\overline{\omega}^2 u^2} - 1,$$

oder

$$\left(\omega + \frac{2}{c\overline{\omega}^2 u}\right)^2 = \frac{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}{c^2\overline{\omega}^4 u^2},$$

woraus

$$152)\quad \omega = tang\,i = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass die doppelten Zeichen in dieser Formel in keiner Beziehung zu den in den obigen Formeln vorkommenden doppelten Zeichen stehen.

Die Bedingung für die Möglichkeit, dass das Auge $(u\,v)$ überhaupt von dem Strahle getroffen werde, ist also

$$153)\quad 4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) \gtreqless 0;$$

wenn dagegen

$$154)\quad 4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) < 0$$

ist, so kann das Auge nicht von dem Strahle getroffen werden.

§. 21.

Wir wollen nun zunächst die Curve untersuchen, deren Gleichung zwischen den Coordinaten u und v

$$155)\quad 4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) = 0$$

ist.

Diese Gleichung bringt man leicht auf die Form

$$156)\quad u^2 = \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right).$$

Legen wir nun durch einen Punkt, dessen primitive Coordinaten $0, -\frac{1}{c\overline{\omega}^2}$ sind, ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem der u_1, v_1; so ist

$$u = u_1,\ v = -\frac{1}{c\overline{\omega}^2} + v_1;\ \text{also}\ u_1 = u,\ v_1 = \frac{1}{c\overline{\omega}^2} + v;$$

und die Gleichung 156) wird also

$$157)\quad u_1^2 = \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\, v_1.$$

Unsere Curve ist folglich eine Parabel, deren Scheitel durch die primitiven Coordinaten $0, -\frac{1}{c\overline{\omega}^2}$ bestimmt wird; die Axe dieser Parabel ist offenbar vertikal, und ihr Parameter ist der absolute Werth von $\frac{4}{c\overline{\omega}^2}$, d. h. $\pm\frac{4}{c\overline{\omega}^2}$, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem c positiv oder negativ ist.

Grösserer Deutlichkeit wegen wollen wir nun die beiden Fälle, wenn c positiv oder negativ ist, von einander unterscheiden.

Erstens. c **sei positiv.**

Wenn der Punkt (uv) oder $(u_1\ v_1)$ innerhalb der Parabel liegt, so ist

$$v_1 > 0,\ u_1^2 < \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\, v_1;$$

also

$$v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2} > 0,\ u^2 < \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

also

$$v > -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4 u^2 < 4c\overline{\omega}^2\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

oder

$$v > -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4 u^2 < 4(c\overline{\omega}^2 v + 1);$$

oder

$$v > -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ 4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) > 0.$$

Wenn der Punkt $(u\,v)$ oder $(u_1\,v_1)$ in der Parabel liegt, so ist

$$v_1 \gtreqless 0,\ u_1{}^2 = \frac{4}{c\overline{\omega}^2} v_1;$$

also

$$v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2} \gtreqless 0,\ u^2 = \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

also

$$v \gtreqless -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4 u^2 = 4c\overline{\omega}^2\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

oder

$$v \gtreqless -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4 u^2 = 4(c\overline{\omega}^2 v + 1);$$

oder

$$v \gtreqless -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ 4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) = 0.$$

Wenn der Punkt $(u\,v)$ oder $(u_1\,v_1)$ ausserhalb der Parabel liegt, so ist entweder

$$v_1 < 0$$

oder

$$v_1 \gtreqless 0,\ u_1{}^2 > \frac{4}{c\overline{\omega}^2} v_1.$$

Für $v_1 < 0$ ist offenbar immer

$$u_1{}^2 > \frac{4}{c\overline{\omega}^2} v_1,$$

wie im zweiten Falle, so dass also in beiden Fällen

$$u_1{}^2 > \frac{4}{c\overline{\omega}^2} v_1,$$

d. i.

$$u^2 > \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right),$$

folglich

$$c^2\overline{\omega}^4u^2 > 4c\overline{\omega}^2\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right),$$

oder

$$c^2\overline{\omega}^4u^2 > 4(c\overline{\omega}^2v + 1),$$

oder

$$4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v) < 0$$

ist.

Hieraus schliesst man nun auch sogleich umgekehrt Folgendes:

Wenn $4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v) > 0$ ist, so liegt der Punkt (uv) innerhalb der Parabel; wenn $4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v) = 0$ ist, so liegt der Punkt (uv) in der Parabel; wenn endlich $4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v) < 0$ ist, so liegt der Punkt (uv) ausserhalb der Parabel.

Zweitens. c sei negativ.

Wenn der Punkt (uv) oder (u_1v_1) innerhalb der Parabel liegt, so ist

$$v_1 < 0,\ u_1^2 < \frac{4}{c\overline{\omega}^2}v_1;$$

also

$$v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2} < 0,\ u^2 < \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

also

$$v < -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4u^2 < 4c\overline{\omega}^2\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

oder

$$v < -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4u^2 < 4(c\overline{\omega}^2v + 1);$$

oder

$$v < -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ 4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v) > 0.$$

Wenn der Punkt (uv) oder (u_1v_1) in der Parabel liegt, so ist

$$v_1 \lessgtr 0,\ u_1^2 = \frac{4}{c\overline{\omega}^2}v_1;$$

also

$$v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2} \lessgtr 0,\ u^2 = \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

also

$$v \leqq -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4 u^2 = 4c\overline{\omega}^2\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right);$$

oder

$$v \leqq -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ c^2\overline{\omega}^4 u^2 = 4(c\overline{\omega}^2 v + 1);$$

oder

$$v \leqq -\frac{1}{c\overline{\omega}^2},\ 4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) = 0.$$

Wenn der Punkt (uv) oder $(u_1 v_1)$ ausserhalb der Parabel liegt, so ist entweder

$$v_1 > 0$$

oder

$$v_1 \leqq 0,\ u_1^2 > \frac{4}{c\overline{\omega}^2} v_1.$$

Für $v_1 > 0$ ist offenbar immer

$$u_1^2 > \frac{4}{c\overline{\omega}^2} v_1,$$

wie im zweiten Falle, so dass also in beiden Fällen

$$u_1^2 > \frac{4}{c\overline{\omega}^2} v_1,$$

d. i.

$$u^2 > \frac{4}{c\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right),$$

folglich

$$c^2\overline{\omega}^4 u^2 > 4c\overline{\omega}^2\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right),$$

oder

$$c^2\overline{\omega}^4 u^2 > 4(c\overline{\omega}^2 v + 1),$$

oder

$$4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) < 0$$

ist.

Hieraus schliesst man wieder sogleich umgekehrt Folgendes:

Wenn $4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) > 0$ ist, so liegt der Punkt (uv) innerhalb der Parabel; wenn $4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) = 0$ ist, so liegt der Punkt (uv) in der Parabel; wenn endlich $4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) < 0$ ist, so liegt der Punkt (uv) ausserhalb der Parabel.

Da dieses Resultat mit dem obigen ganz übereinstimmt, so ist

es allgemein, und gilt also, die Grösse c mag positiv oder negativ sein.

Nennen wir nun die durch die Gleichung

$$u^2 = \frac{4}{c\,\overline{\omega}^2}\left(v + \frac{1}{c\,\overline{\omega}^2}\right)$$

oder

$${u_1}^2 = \frac{4}{c\,\overline{\omega}^2}\,v_1$$

characterisirte Parabel die Gränzparabel, und halten das Vorhergehende mit den Gleichungen 152), 153), 154) zusammen, so ergiebt sich folgender Satz:

Wenn das Auge **innerhalb** der Gränzparabel liegt, so wird es im Allgemeinen von **zwei** von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen getroffen; wenn das Auge **in** der Gränzparabel liegt, so wird es im Allgemeinen von **nur einem** von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahle getroffen; wenn das Auge **ausserhalb** der Gränzparabel liegt, so wird es von **keinem** von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahle getroffen.

§. 22.

Wir wollen nun annehmen, dass das Auge innerhalb der Gränzparabel liege, und dass also nach dem Vorhergehenden

$$4 - c\,\overline{\omega}^2(c\,\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) > 0$$

sei.

In diesem Falle hat $\omega = tang\,i$ zwei reelle durch die Formel

$$\omega = tang\,i = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - c\,\overline{\omega}^2(c\,\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\,\overline{\omega}^2 u}$$

bestimmte Werthe.

Das Product dieser beiden Werthe ist, wie man leicht findet:

$$1 - \frac{4v}{c\,\overline{\omega}^2 u^2}.$$

Wenn nun

$$\frac{4v}{c\,\overline{\omega}^2 u^2} < 1$$

ist, so ist das Product der beiden Werthe von $\omega = tang\,i$ grösser

als Null, und diese beiden Werthe haben also gleiche Vorzeichen.

Ist cu positiv, so liefert das untere Zeichen in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ offenbar einen negativen Werth, und es sind also beide Werthe von $\omega = tang\, i$, folglich auch die beiden entsprechenden Werthe von i, negativ, d. h. nach dem Obigen die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen, von denen das Auge getroffen wird, treten beide aus den oberen in die unteren Schichten. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v$$
$$= \left\{\frac{2(1+c\overline{\omega}^2 v) - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}\right\}^2,$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v$$
$$= \left\{\frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ positiv ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} < \frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v}$$
$$= \frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega = 2\frac{v}{u},$$

also

$$u = \frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega$$

multiplicirt:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega\right\},$$

oder, weil ω negativ ist:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den oberen in die unteren Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} > \frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, und folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v}$$

$$= -\frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

folglich

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega\right\},$$

oder, weil ω negativ ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den oberen in die unteren Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} = \frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u} = 0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} = 0$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v = 0,$$

d. i.

$$v = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega + 2\frac{v}{u} = 0 \text{ oder } u = \frac{2v}{\omega}$$

gesetzt,

$$u = -\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

giebt. Weil nun ω negativ ist, so ist

$$u = \frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}, \quad v = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge im

Scheitel des Strahls, und also eigentlich im directen und reflectirten Zweige zugleich liegt. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v$$

$$= \left\{\frac{2(1+c\overline{\omega}^2v)+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}\right\}^2,$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v$$

$$= \left\{\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ positiv ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} < \frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u} + 2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}$$

$$= \frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u} + 2\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v} + \omega = 2\frac{v}{u},$$

also

$$u = \frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}+\omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}-\omega$$

multiplicirt:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega\right\},$$

oder, weil ω negativ ist:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den obern in die untern Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} > \frac{2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, und folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v}$$

$$= -\frac{2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

folglich

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega\right\},$$

oder, weil ω negativ ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den obern in die untern Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u}=\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u}=0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}=0$$

oder

$$\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v=0,$$

d. i.

$$v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega+2\frac{v}{u}=0 \text{ oder } u=\frac{2v}{\omega}$$

gesetzt,

$$u=-\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\varpi^2}$$

giebt. Weil nun ω negativ ist, so ist

$$u=\frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\varpi^2},\quad v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge im Scheitel des Strahls, und also eigentlich im directen und reflectirten Zweige zugleich liegt.

Wenn cu negativ ist, so liefert das untere Zeichen in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ offenbar einen positiven Werth, und es sind also beide Werthe von $\omega = tang\, i$, folglich auch die beiden entsprechenden Werthe von i positiv, d. h. nach dem Obigen, die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen, von

denen das Auge getroffen wird, treten beide aus den unteren in die oberen Schichten. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v = \left\{\frac{2\,(1 + c\varpi^2 v) - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}\right\}^2$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v = \left\{\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ negativ ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} < -\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} = -\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

also

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v}+\omega\right\},$$

oder, weil ω positiv ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v}+\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} > -\frac{2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}+2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}$$

$$=\frac{2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}+2\frac{v}{u},$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}+\omega=2\frac{v}{u},$$

folglich

$$u=\frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}+\omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}-\omega$$

multiplicirt:

$$u=\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}-\omega\right\},$$

oder, weil ω positiv ist:

$$u=\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}-\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den untern in die obern Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} = -\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u}=0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}=0$$

oder

$$\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v=0,$$

d. i.

$$v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega+2\frac{v}{u}=0 \text{ oder } u=\frac{2v}{\omega}$$

gesetzt,

$$u=-\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\varpi^2}$$

giebt. Weil nun ω positiv ist, so ist

$$u=-\frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\varpi^2},\quad v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge im Scheitel des Strahls, und also eigentlich im directen und reflectirten Zweige zugleich liegt. — Für

$$\omega=tang\,i=\frac{-2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v$$

$$= \left\{\frac{2(1+c\overline{\omega}^2 v) + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}\right\}^2,$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v$$

$$= \left\{\frac{2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ negativ ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} < -\frac{2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega} u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v}$$

$$= -\frac{2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

also

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega\right\},$$

oder, weil ω positiv ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} > -\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, und folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}$$

$$=\frac{2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u},$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}+\omega=2\frac{v}{u},$$

folglich

$$u=\frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}+\omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}-\omega$$

multiplicirt:

$$u=\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}-\omega\right\},$$

oder, weil ω positiv ist:

$$u=\frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}-\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} = -\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}+2\frac{v}{u}=0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v}=0$$

oder

$$\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2v=0,$$

d. i.

$$v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega+2\frac{v}{u}=\text{oder } u=\frac{2v}{\omega}$$

gesetzt,

$$u=-\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

giebt. Weil nun ω positiv ist, so ist

$$u=-\frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},\quad v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge im Scheitel des Strahls, und also eigentlich im directen und reflectirten Zweige zugleich liegt.

Wenn ferner

$$\frac{4v}{c\overline{\omega}^2u^2}>1$$

ist, so ist das Product der beiden Werthe von $\omega = tang\, i$ kleiner als Null, und diese beiden Werthe haben also ungleiche Vorzeichen.

Ist cu positiv, so liefert das untere Zeichen in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ offenbar einen negativen, folglich das obere Zeichen einen positiven Werth von $\omega = tang\, i$, also auch von i, d. i. nach dem Obigen, die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen, von denen das Auge getroffen wird, treten aus den unteren in die oberen, oder aus den oberen in die unteren

Schichten, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ das obere oder das untere Zeichen nimmt. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, wie man leicht findet,

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$

$$= \left\{\frac{2(1+c\varpi^2 v) - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}\right\}^2$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$

$$= \left\{\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ negativ ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} < \frac{-2 + \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$

$$= -\frac{2 - \sqrt{4 - c\varpi^2(c\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\varpi^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

also

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 v}+\omega\right\},$$

oder, weil ω positiv ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 v}+\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} > \frac{-2+\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}+2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 v}$$

$$=\frac{2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u}+2\frac{v}{u},$$

und folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 v}+\omega=2\frac{v}{u},$$

also

$$u=\frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 v}+\omega},$$

oder, wenn man im Zähler und im Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 v}-\omega$$

multiplicirt:

$$u=\frac{2}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 v}-\omega\right\},$$

oder, weil ω positiv ist:

$$u=\frac{2}{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 v}-\sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den unteren in die oberen Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ positiv und

$$2\frac{v}{u} = \frac{-2+\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u}+2\frac{v}{u}=0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v}=0$$

oder

$$\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2v=0,$$

d. i.

$$v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega+2\frac{v}{u}=0 \text{ oder } u=\frac{2v}{\omega}$$

gesetzt:

$$u=-\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\varpi^2}$$

giebt. Weil nun ω positiv ist, so ist

$$u=-\frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\varpi^2},\quad v=-\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\varpi^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge in dem Scheitel des Strahls, und also eigentlich in dem directen und reflectirten Zweige zugleich liegt. — Für

$$\omega=tang\,i=\frac{-2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2u},$$

wo ω bekanntlich negativ ist, gelangt man ganz zu denselben Resultaten, wie in dem vorhergehenden Falle, wenn

$$\frac{4v}{c\,\varpi^2 u^2} < 1$$

ist, und es braucht daher die dort geführte Untersuchung hier nicht wiederholt zu werden.

Wenn cu negativ ist, so liefert das untere Zeichen in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ offenbar einen positiven, folglich das obere Zeichen einen negativen Werth von $\omega = tang\, i$, also auch von i, d. h. nach dem Obigen, die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahlen, von denen das Auge getroffen wird, treten aus den oberen in die unteren, oder aus den unteren in die oberen Schichten, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\omega = tang\, i$ das obere oder das untere Zeichen nimmt. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2 + \sqrt{4 - c\,\varpi^2 (c\,\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\,\varpi^2 u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$

$$= \left\{\frac{2(1+c\,\varpi^2 v) - \sqrt{4 - c\,\varpi^2 (c\,\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\,\varpi^2 u}\right\}^2$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v$$

$$= \left\{\frac{2 - \sqrt{4 - c\,\varpi^2 (c\,\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\,\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}\right\}^2.$$

Wenn nun $\frac{v}{u}$ positiv ist, oder wenn $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} < \frac{2 - \sqrt{4 - c\,\varpi^2 (c\,\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\,\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\,\varpi^2 (c\,\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\,\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine positive Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{4 - c\,\varpi^2 (c\,\varpi^2 u^2 - 4v)}}{c\,\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u},$$

folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega = 2\frac{v}{u},$$

also

$$u = \frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega$$

multiplicirt:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega\right\},$$

oder, weil ω negativ ist:

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\varpi^2}\left\{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den oberen in die unteren Schichten treten, so erhellet aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, und daher eine Luftspiegelung Statt findet. Wenn aber $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} > \frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2 u} + 2\frac{v}{u}$$

eine negative Grösse, also

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v}$$

$$= -\frac{2-\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2u^2-4v)}}{c\varpi^2 u} - 2\frac{v}{u},$$

folglich

$$\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega = -2\frac{v}{u},$$

also

$$u = -\frac{2v}{\sqrt{\omega^2+c(1+\omega^2)\varpi^2 v} - \omega},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega$$

multiplicirt:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \omega\right\},$$

oder, weil ω negativ ist:

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} - \sqrt{\omega^2}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen die Strahlen aus den oberen in die unteren Schichten treten, so erhellet aus 142), dass in diesem Falle das Auge von dem directen Zweige getroffen wird, eine eigentliche Luftspiegelung also nicht Statt findet. Wenn endlich $\frac{v}{u}$ negativ und

$$-2\frac{v}{u} = \frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}$$

ist, so ist

$$\frac{2 - \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u} + 2\frac{v}{u} = 0,$$

also

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} = 0$$

oder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v = 0,$$

d. i.

$$v = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2},$$

welches, in die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$-\omega + 2\frac{v}{u} = 0 \text{ oder } u = \frac{2v}{\omega}$$

gesetzt:

$$u = -\frac{2\omega}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}$$

giebt. Weil nun ω negativ ist, so ist

$$u = \frac{2\sqrt{\omega^2}}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}, \quad v = -\frac{\omega^2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2};$$

woraus sich nach 141) ergiebt, dass in diesem Falle das Auge in dem Scheitel des Strahls, und also eigentlich in dem directen und reflectirten Zweige zugleich liegt. — Für

$$\omega = tang\, i = \frac{-2-\sqrt{4-c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2-4v)}}{c\overline{\omega}^2u},$$

wo ω bekanntlich positiv ist, gelangt man ganz zu denselben Resultaten, wie in dem vorhergehenden Falle, wenn

$$\frac{4v}{c\overline{\omega}^2u^2} < 1$$

ist, und es braucht daher die dort geführte Untersuchung hier nicht wiederholt zu werden.

Wenn endlich

$$\frac{4v}{c\overline{\omega}^2u^2} = 1,$$

also $4v = c\overline{\omega}^2u^2$ ist, so ist

$$\omega = tang\, i = \frac{-2\pm 2}{c\overline{\omega}^2u} = -\frac{\{0\}}{c\overline{\omega}^2u}.$$

Aus $\omega = tang\, i = 0$ folgt $i = 0$, und der Strahl ist also in diesem Falle horizontal, stellt folglich offenbar eine gerade Linie dar, so dass von einem directen und einem reflectirten Zweige im eigentlichen Sinne nicht mehr die Rede sein kann. — Aus

$$\omega = tang\, i = -\frac{4}{c\overline{\omega}^2u}$$

folgt

$$u = -\frac{4}{c\omega\overline{\omega}^2},$$

also, weil $v = {}^1/_4 c\overline{\omega}^2u^2$ ist,

$$v = \frac{4}{c\omega^2\overline{\omega}^2}.$$

Wenn nun cu positiv ist, so ist $\omega = tang\, i$, also auch i negativ, und der Strahl, von welchem das Auge getroffen wird, tritt folglich aus den oberen in die unteren Schichten. Es ist aber

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v = \left(\frac{2+\omega^2}{\omega}\right)^2,$$

also, weil ω negativ ist:

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} = -\frac{2+\omega^2}{\omega}, \quad \sqrt{\omega^2} = -\omega.$$

Auf der Stelle überzeugt man sich, dass

$$-\frac{4}{c\omega\overline{\omega}^2} = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left(-\frac{2+\omega^2}{\omega} - \omega\right),$$

d. i.

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}$$

ist, und sieht also aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, folglich eine Luftspiegelung Statt findet.

Wenn ferner cu negativ ist, so ist $\omega = tang\, i$, also auch i positiv, und der Strahl, von welchem das Auge getroffen wird, tritt folglich aus den unteren in die oberen Schichten. Es ist aber wieder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v = \left(\frac{2+\omega^2}{\omega}\right)^2,$$

also, weil ω positiv ist:

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} = \frac{2+\omega^2}{\omega}, \quad \sqrt{\omega^2} = \omega.$$

Auf der Stelle überzeugt man sich, dass

$$-\frac{4}{c\omega\overline{\omega}^2} = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left(\frac{2+\omega^2}{\omega} + \omega\right),$$

d. i.

$$u = -\frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}$$

ist, und sieht also aus 143), dass auch in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, folglich wieder eine Luftspiegelung Statt findet.

§. 23.

Wir wollen ferner auch den Fall betrachten, wenn das Auge in der Gränzparabel liegt, folglich nach dem Vorhergehenden

$$4 - c\overline{\omega}^2 (c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v) = 0$$

ist.

In diesem Falle hat $\omega = tang\, i$ nur einen durch die Formel

$$\omega = tang\, i = -\frac{2}{c\overline{\omega}^2 u}$$

bestimmten Werth. Also ist

$$u = -\frac{2}{c\omega\overline{\omega}^2},$$

und, weil nach dem Obigen

$$v = \frac{c^2\overline{\omega}^4 u^2 - 4}{4c\overline{\omega}^2}$$

ist, wie man leicht findet:

$$v = \frac{1-\omega^2}{c\omega^2\overline{\omega}^2}.$$

Wenn nun cu positiv ist, so ist $\omega = tang\, i$, also auch i negativ, und der Strahl, von welchem das Auge getroffen wird, tritt folglich aus den oberen in die unteren Schichten. Es ist aber

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v = \frac{1}{\omega^2},$$

also, weil ω negativ ist:

$$\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} = -\frac{1}{\omega},\quad \sqrt{\omega^2} = -\omega.$$

Auf der Stelle überzeugt man sich, dass

$$-\frac{2}{c\omega\overline{\omega}^2} = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left(-\frac{1}{\omega} - \omega\right),$$

d. i.

$$u = \frac{2}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}\left\{\sqrt{\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} + \sqrt{\omega^2}\right\}$$

ist, und sieht daher aus 143), dass in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, also eine Luftspiegelung Statt findet.

Wenn ferner cu negativ ist, so ist $\omega = tang\, i$, also auch i positiv, und der Strahl, von welchem das Auge getroffen wird, tritt folglich aus den unteren in die oberen Schichten. Es ist aber wieder

$$\omega^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v = \frac{1}{\omega^2},$$

also, weil ω positiv ist:

$$\gamma\overline{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v} = \frac{1}{\omega},\quad \gamma\overline{\omega^2} = \omega.$$

Auf der Stelle überzeugt man sich, dass

$$-\frac{2}{c\,\omega\,\overline{\omega}^2} = -\frac{2}{c\,(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\left(\frac{1}{\omega}+\omega\right),$$

d. i.

$$u = -\frac{2}{c\,(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}\left\{\gamma\overline{\omega^2+c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2 v}+\gamma\overline{\omega^2}\right\}$$

ist, und sieht daher aus 143), dass auch in diesem Falle das Auge von dem reflectirten Zweige getroffen wird, also eine Luftspiegelung Statt findet.

§. 24.

Mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Bedingungen ist man im Stande, in allen Fällen ohne Schwierigkeit zu entscheiden, ob das Auge überhaupt von einem von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden Strahle getroffen werden kann oder nicht, und ob im ersten Falle eine Luftspiegelung wirklich Statt findet oder nicht; man kann jedoch diese Bedingungen auch leicht auf geometrische Ausdrücke bringen, worüber nun noch das Folgende in der Kürze bemerkt werden soll, indem wir diesen Gegenstand noch weiter auszuführen, füglich dem Leser überlassen können.

Durch die Gleichung

$$158)\quad \frac{4y}{c\,\overline{\omega}^2\,x^2} = 1$$

oder

$$159)\quad x^2 = \frac{4}{c\,\overline{\omega}^2}\,y$$

wird offenbar eine der Gränzparabel gleiche und gegen dieselbe eine völlig symmetrische Lage habende, aber in dem Anfangspunkte der Coordinaten oder dem Ausgangspunkte der Strahlen ihren Scheitel habende Parabel dargestellt, welche die zweite Gränzparabel genannt werden soll, im Gegensatz zu der vorhergehenden Gränzparabel, die wir deshalb von nun an nicht mehr die Gränzparabel schlechthin, wie bisher, sondern die erste Gränzparabel nennen wollen. Jenachdem aber

$$\frac{4v}{c\,\overline{\omega}^2\,u^2} < 1, \quad \frac{4v}{c\,\overline{\omega}^2\,u^2} > 1, \quad \frac{4v}{c\,\overline{\omega}^2\,u^2} = 1$$

ist, liegt das Auge $(u\,v)$, wie leicht aus §. 21. geschlossen wird, beziehungsweise ausserhalb, innerhalb, in der zweiten Gränzparabel.

Wenn überhaupt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung einer Ellipse ist, so ist für jeden Punkt (xy) in dieser Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Wenn dagegen der Punkt (xy) ausserhalb der Ellipse liegt, so ist entweder $x^2 > a^2$, d. i. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 > 1$, und folglich um so mehr

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 > 1;$$

oder es ist $x^2 < a^2$, d. i. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 < 1$, und, wenn y_1 die der Abscisse x entsprechende Ordinate der Ellipse bezeichnet, $y^2 > y_1^2$, also auch $\left(\frac{y}{b}\right)^2 > \left(\frac{y_1}{b}\right)^2$, folglich, weil wegen der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

ist,

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 > 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

d. i. wieder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 > 1.$$

Wenn endlich der Punkt (xy) innerhalb der Ellipse liegt, so ist $x^2 < a^2$, d. i. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 < 1$, und, wenn wieder y_1 die der Abscisse x entsprechende Ordinate der Ellipse bezeichnet, $y^2 < y_1^2$, also auch $\left(\frac{y}{b}\right)^2 < \left(\frac{y_1}{b}\right)^2$; weil nun aber wegen der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2=1,\quad \left(\frac{y_1}{b}\right)^2=1-\left(\frac{x}{a}\right)^2$$

ist, so ist

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2<1-\left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

d. i.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2<1.$$

Hieraus ergiebt sich nun, dass die Bedingung, dass der Punkt (xy)

in, ausserhalb, innerhalb

der Ellipse liegt, respective

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2>1,\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2<1$$

ist.

Aus

$$160)\quad 2\frac{y}{x}=\frac{-2\pm\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2x^2-4y)}}{c\varpi^2x}$$

folgt

$$2c\varpi^2y=-2\pm\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2x^2-4y)},$$

$$2(1+c\varpi^2y)=\pm\sqrt{4-c\varpi^2(c\varpi^2x^2-4y)},$$

$$4+8c\varpi^2y+4c^2\varpi^4y^2=4-c^2\varpi^4x^2+4c\varpi^2y,$$

$$c^2\varpi^4x^2+4c\varpi^2y+4c^2\varpi^4y^2=0,$$

$$c\varpi^2x^2+4y+4c\varpi^2y^2=0,$$

$$^1/_4x^2+y^2+\frac{1}{c\varpi^2}y=0,$$

$$^1/_4x^2+\left(y+\frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2=\frac{1}{4c^2\varpi^4},$$

$$c^2\varpi^4x^2+4c^2\varpi^4\left(y+\frac{1}{2c\varpi^2}\right)^2=1;$$

d. i.

$$161)\quad \left(\frac{x}{\frac{1}{c\varpi^2}}\right)^2+\left(\frac{y+\frac{1}{2c\varpi^2}}{\frac{1}{2c\varpi^2}}\right)^2=1,$$

welches nach 145) die Gleichung der Scheitelellipse ist.

Wenn nun der Punkt $(u\,v)$ in der Scheitelellipse liegt, so ist

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{c\,\overline{\omega}^2}}\right)^2+\left(\frac{v+\frac{1}{2\,c\,\overline{\omega}^2}}{\frac{1}{2\,c\,\overline{\omega}^2}}\right)^2=1,$$

$$^1/_4\,u^2+\left(v+\frac{1}{2\,c\,\overline{\omega}^2}\right)^2=\frac{1}{4\,c^2\,\overline{\omega}^4},$$

$$^1/_4\,u^2+v^2+\frac{1}{c\,\overline{\omega}^2}\,v=0,$$

$$c^2\,\overline{\omega}^4\,u^2+4\,c\,\overline{\omega}^2\,v+4\,c^2\,\overline{\omega}^4\,v^2=0,$$

$$4\,c^2\,\overline{\omega}^4\,v^2+8\,c\,\overline{\omega}^2\,v+4=4-c^2\,\overline{\omega}^4\,u^2+4\,c\,\overline{\omega}^2\,v,$$

$$4\,c^2\,\overline{\omega}^4\left(v+\frac{1}{c\,\overline{\omega}^2}\right)^2=4-c\,\overline{\omega}^2\left(c\,\overline{\omega}^2\,u^2-4\,v\right),$$

$$\frac{4}{u^2}\left(v+\frac{1}{c\,\overline{\omega}^2}\right)^2=\frac{4-c\,\overline{\omega}^2\,(c\,\overline{\omega}^2\,u^2-4\,v)}{c^2\,\overline{\omega}^4\,u^2},$$

$$\frac{2}{u}\left(v+\frac{1}{c\,\overline{\omega}^2}\right)=\pm\frac{\sqrt{4-c\,\overline{\omega}^2\,(c\,\overline{\omega}^2\,u^2-4\,v)}}{c\,\overline{\omega}^2\,u},$$

$$2\,\frac{v}{u}=\frac{-2\pm\sqrt{4-c\,\overline{\omega}^2\,(c\,\overline{\omega}^2\,u^2-4\,v)}}{c\,\overline{\omega}^2\,u},$$

$$-2\,\frac{v}{u}=\frac{2\mp\sqrt{4-c\,\overline{\omega}^2\,(c\,\overline{\omega}^2\,u^2-4\,v)}}{c\,\overline{\omega}^2\,u}.$$

Wenn der Punkt $(u\,v)$ ausserhalb der Scheitelellipse liegt, so ist

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{c\,\overline{\omega}^2}}\right)^2+\left(\frac{v+\frac{1}{2\,c\,\overline{\omega}^2}}{\frac{1}{2\,c\,\overline{\omega}^2}}\right)^2>1,$$

$$^1/_4\,u^2+\left(v+\frac{1}{2\,c\,\overline{\omega}^2}\right)^2>\frac{1}{4\,c^2\,\overline{\omega}^4},$$

$$^1/_4\,u^2+v^2+\frac{1}{c\,\overline{\omega}^2}\,v>0,$$

$$c^2\,\overline{\omega}^4\,u^2+4\,c\,\overline{\omega}^2\,v+4\,c^2\,\overline{\omega}^4\,v^2>0,$$

$$4c^2\overline{\omega}^4v^2 + 8c\overline{\omega}^2v + 4 > 4 - c^2\overline{\omega}^4u^2 + 4c\overline{\omega}^2v,$$

$$4c^2\overline{\omega}^4\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right)^2 > 4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v),$$

$$\frac{4}{u^2}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right)^2 > \frac{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v)}{c^2\overline{\omega}^4u^2}.$$

Wenn nun $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right) > 0$ ist, so ist, cu mag positiv oder negativ sein,

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right) \gtrless \frac{\sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \gtrless \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \gtrless \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2u}.$$

Wenn dagegen $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right) < 0$ ist, so ist, cu mag positiv oder negativ sein,

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right) \lessgtr \frac{\sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \lessgtr \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} \lessgtr \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2u}.$$

Wenn der Punkt (uv) innerhalb der Scheitelellipse liegt, so ist

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{c\overline{\omega}^2}}\right)^2 + \left(\frac{v + \frac{1}{2c\overline{\omega}^2}}{\frac{1}{2c\overline{\omega}^2}}\right)^2 < 1,$$

$$^1/_4u^2 + \left(v + \frac{1}{2c\overline{\omega}^2}\right)^2 < \frac{1}{4c^2\overline{\omega}^4},$$

$$^1/_4u^2 + v^2 + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}v < 0,$$

$$c^2\bar{\omega}^4u^2 + 4c\bar{\omega}^2v + 4c^2\bar{\omega}^4v^2 < 0,$$

$$4c^2\bar{\omega}^4v^2 + 8c\bar{\omega}^2v + 4 < 4 - c^2\bar{\omega}^4u^2 + 4c\bar{\omega}^2v,$$

$$4c^2\bar{\omega}^4\left(v + \frac{1}{c\bar{\omega}^2}\right)^2 < 4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v),$$

$$\frac{4}{u^2}\left(v + \frac{1}{c\bar{\omega}^2}\right)^2 < \frac{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}{c^2\bar{\omega}^4u^2}.$$

Wenn nun $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\bar{\omega}^2}\right) > 0$ ist, so ist für $cu > 0$:

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\bar{\omega}^2}\right) < \frac{\sqrt{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\bar{\omega}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\bar{\omega}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\bar{\omega}^2u};$$

und für $cu < 0$:

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\bar{\omega}^2}\right) > \frac{\sqrt{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\bar{\omega}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} > \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\bar{\omega}^2u},$$

$$\pm\frac{v}{u} > \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\bar{\omega}^2u}.$$

Wenn dagegen $\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\bar{\omega}^2}\right) < 0$ ist, so ist für $cu > 0$:

$$\pm\frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\bar{\omega}^2}\right) < \frac{\sqrt{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\bar{\omega}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\bar{\omega}^2u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} < \mp\frac{2 \mp \sqrt{4 - c\bar{\omega}^2(c\bar{\omega}^2u^2 - 4v)}}{c\bar{\omega}^2u};$$

und für $cu < 0$:

$$\pm \frac{2}{u}\left(v + \frac{1}{c\overline{\omega}^2}\right) > \frac{\sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} > \frac{\mp 2 + \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u},$$

$$\pm 2\frac{v}{u} > \mp \frac{2 \mp \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u},$$

Wenn also der Punkt (uv) innerhalb der Scheitelellipse liegt, so ist für $cu > 0$ immer

$$\pm 2\frac{v}{u} < \mp \frac{2 \mp \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u},$$

und für $cu < 0$ immer

$$\pm 2\frac{v}{u} > \mp \frac{2 \mp \sqrt{4 - c\overline{\omega}^2(c\overline{\omega}^2 u^2 - 4v)}}{c\overline{\omega}^2 u}.$$

Die Anwendung, welche man von diesen Sätzen im Obigen machen kann, wird leicht ohne weitere Erläuterung von selbst erhellen.

§. 25.

Wir wollen nun auch die Coordinaten des Bildes nach §. 16. entwickeln.

Nach 150) ist die allgemeine Gleichung des Strahls

$$x^2 = \frac{4}{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}(y - \omega x)$$

oder

$$y = \frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{4}x^2 + \omega x,$$

und $x = u$, $y = v$ gesetzt:

$$v = \frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{4}u^2 + \omega u.$$

Also ist in der in §. 16. eingeführten Bezeichnung

$$F(\omega, u) = \frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{4}u^2 + \omega u,$$

und folglich

$$\frac{\partial_u F(\omega, u)}{\partial u} = \frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{2}u + \omega,$$

$$\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u)}{\partial u^2} = \frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{2},$$

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial \omega} = \frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,\omega u^2 + u,$$

$$\frac{\partial_u \partial_\omega F(\omega,u)}{\partial u\,\partial\omega} = \frac{\partial_\omega \partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u} = c\,\omega\,\overline{\omega}^2 u + 1.$$

Also ist

$$1 + \left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2$$

$$= 1 + \left\{\frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{2}\,u + \omega\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{2}\right\}^2 u^2 + c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2\,\omega\,u + 1 + \omega^2$$

$$= (1+\omega^2)\left\{\frac{c^2\overline{\omega}^4}{4}\,u^2 + \frac{c^2\overline{\omega}^4}{4}\,\omega^2 u^2 + c\,\overline{\omega}^2\,\omega\,u + 1\right\}$$

$$= (1+\omega^2)\left\{\frac{c^2\overline{\omega}^4}{4}\,u^2 + \left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,\omega\,u + 1\right)^2\right\},$$

folglich

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1 + \left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}$$

$$= (1+\omega^2)\,u\left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,\omega\,u + 1\right)\left\{\frac{c^2\overline{\omega}^4}{4}\,u^2 + \left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,\omega\,u + 1\right)^2\right\}$$

und

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1 + \left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}$$

$$= (1+\omega^2)\,u\left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,\omega u + 1\right)\left\{\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,u + \omega\left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,\omega u + 1\right)\right\}$$

$$\times\left\{\frac{c^2\overline{\omega}^4}{4}\,u^2 + \left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,\omega u + 1\right)^2\right\}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$(162)\quad U = \frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,u,\quad V = \frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,\omega u + 1;$$

so ist

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}$$

$$=(1+\omega^2)\,u\,V\,(U^2+V^2).$$

und

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}$$

$$=(1+\omega^2)\,u\,V(U+\omega V)(U^2+V^2).$$

Ferner ist

$$\frac{\partial_\omega F(\omega,u)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial_u{}^2 F(\omega,u}{\partial u^2}-\left\{1+\left(\frac{\partial_u F(\omega,u)}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial_\omega\partial_u F(\omega,u)}{\partial\omega\,\partial u}$$

$$=\frac{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}{2}\,u\left(\frac{c\,\overline{\omega}^2}{2}\,\omega\,u+1\right)\left\{\frac{c\,\overline{\omega}^2}{2}\,u+\omega\left(\frac{c\,\overline{\omega}^2}{2}\,\omega u+1\right)\right\}$$

$$-(1+\omega^2)(c\,\omega\,\overline{\omega}^2\,u+1)\left\{\frac{c^2\,\overline{\omega}^4}{4}\,u^2+\left(\frac{c\,\overline{\omega}^2}{2}\,\omega u+1\right)^2\right\}$$

$$=\frac{c(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}{2}\,u\,V(U+\omega V)$$

$$-(1+\omega^2)(\omega U+V)(U^2+V^2)$$

$$=(1+\omega^2)\,U\,V(U+\omega V)$$

$$-(1+\omega^2)(\omega U+V)(U^2+V^2)$$

$$=-(1+\omega^2)(\omega U^3+V^3).$$

Daher ist nach 127), wie man leicht findet:

$$163)\quad\begin{cases}\mathfrak{x}-u=-\dfrac{u\,V(U^2+V^2)}{\omega U^3+V^3},\\[2ex]\mathfrak{y}-v=-\dfrac{u\,V(U+\omega V)(U^2+V^2)}{\omega U^3+V^3};\end{cases}$$

oder

$$164)\quad\begin{cases}\mathfrak{x}-u=-u\dfrac{V(U^2+V^2)}{\omega U^3+V^3},\\[2ex]\mathfrak{y}-v=-u\dfrac{V\,U^2+V^2}{\omega U^3+V^3}(U+\omega V);\end{cases}$$

oder

$$165)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} - u = -u\,\dfrac{1+\left(\frac{U}{V}\right)^2}{1+\omega\left(\frac{U}{V}\right)^3}, \\ \mathfrak{y} - v = -u\,\dfrac{1+\left(\frac{U}{V}\right)^2}{1+\omega\left(\frac{U}{V}\right)^3}(U+\omega V). \end{cases}$$

Auch ist, wie man leicht findet:

$$166)\quad \mathfrak{x} = uU^2\,\frac{\omega U - V}{\omega U^3 + V^3}.$$

Weil nach dem Obigen

$$v = \frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{4}\,u^2 + \omega u$$

ist, so ist

$$\frac{v}{u} = \frac{c(1+\omega^2)\overline{\omega}^2}{4}\,u + \omega$$

$$= \frac{c\overline{\omega}^2}{4}\,u + \omega\left(\frac{c\overline{\omega}^2}{4}\,\omega u + 1\right)$$

$$= {}^1/_2 \cdot \frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,u + \omega\left(\frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,\omega u + 1 - {}^1/_2\,\omega \cdot \frac{c\overline{\omega}^2}{2}\,u\right)$$

$$= {}^1/_2 U + \omega\,(V - {}^1/_2\,\omega U)$$

$$= {}^1/_2(1-\omega^2)U + \omega V.$$

Nun ist aber nach 164)

$$\mathfrak{y} - v = (U + \omega V)(\mathfrak{x} - u),$$

also

$$\mathfrak{y} = (U+\omega V)\mathfrak{x} - u(U+\omega V) + v$$

$$= (U+\omega V)\mathfrak{x} - u(U+\omega V) + {}^1/_2(1-\omega^2)uU + \omega uV$$

$$= (U+\omega V)\mathfrak{x} - {}^1/_2(1+\omega^2)uU,$$

und folglich nach 166):

$$167)\quad \mathfrak{y} = uU\left\{\frac{U(\omega U - V)(U+\omega V)}{\omega U^3 + V^3} - {}^1/_2(1+\omega^2)\right\}.$$

Die Formeln 164) oder 165) sind jedenfalls die einfachsten.

§. 26.

Um noch ein zweites Beispiel für die Anwendung unserer im Obigen entwickelten allgemeinen Formeln zu geben, wollen wir jetzt noch den Fall in der Kürze betrachten, wenn, indem der Ausgangspunkt der Strahlen wieder als Anfang der Coordinaten angenommen wird, und a, A constante Grössen bezeichnen, e aber seine bekannte Bedeutung hat,

$$D_{(0)}^{(y)} = A(1 - e^{ay}).$$

ist. Uebrigens werden wir im Folgenden nur den Fall betrachten, wenn A positiv ist.

Zu dem Ende müssen wir zuerst im Allgemeinen das Integral

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + be^{\alpha x}}}$$

entwickeln.

Man setze $u = e^{\alpha x}$, so ist $\partial u = \alpha e^{\alpha x} \partial x = \alpha u \partial x$, also

$$\partial x = \frac{\partial u}{\alpha u},$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{\sqrt{a + be^{\alpha x}}} = \frac{\partial u}{\alpha u \sqrt{a + bu}},$$

so dass es jetzt bloss auf die Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial u}{u\sqrt{a + bu}}$$

ankommt.

Setzt man $\sqrt{a + bu} = v$, also $a + bu = v^2$, und folglich

$$u = \frac{v^2 - a}{b}, \quad \partial u = \frac{2v\partial v}{b};$$

so ist

$$\frac{\partial u}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{2v\partial v}{b} \cdot \frac{b}{v^2 - a} \cdot \frac{1}{v} = \frac{2\partial v}{v^2 - a}.$$

Ist nun a positiv, so kann man

$$v^2 - a = (v + \sqrt{a})(v - \sqrt{a}),$$

also

$$\frac{\partial v}{v^2 - a} = \frac{\partial v}{(v + \sqrt{a})(v - \sqrt{a})},$$

d. i. nach den bekannten Regeln der Zerlegung der gebrochenen Functionen:

$$\frac{\partial v}{v^2 - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{\partial v}{v + \sqrt{a}} - \frac{\partial v}{v - \sqrt{a}}\right),$$

$$\int \frac{\partial v}{v^2 - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\int \frac{\partial v}{v + \sqrt{a}} - \int \frac{\partial v}{v - \sqrt{a}}\right)$$

setzen, woraus sich

$$\int \frac{\partial v}{v^2 - a} = \frac{1}{4\sqrt{a}}\left\{l.(v + \sqrt{a})^2 - l.(v - \sqrt{a})^2\right\}$$

oder

$$\int \frac{\partial v}{v^2 - a} = \frac{1}{4\sqrt{a}}\, l.\left(\frac{v + \sqrt{a}}{v - \sqrt{a}}\right)^2$$

ergiebt. Daher ist nach dem Obigen

$$\int \frac{\partial u}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\, l.\left(\frac{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}\right)^2,$$

und folglich

$$168)\quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{a + be^{\alpha x}}}$$

$$= \frac{1}{2\alpha\sqrt{a}}\, l.\left(\frac{\sqrt{a + be^{\alpha x}} + \sqrt{a}}{\sqrt{a + be^{\alpha x}} - \sqrt{a}}\right)^2$$

oder

$$169)\quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{a + be^{\alpha x}}}$$

$$= \frac{1}{2\alpha\sqrt{a}}\, l.\left\{\frac{(\sqrt{a + be^{\alpha x}} + \sqrt{a})^2}{be^{\alpha x}}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2\alpha\sqrt{a}}\, l.\left\{\frac{be^{\alpha x}}{(\sqrt{a + be^{\alpha x}} - \sqrt{a})^2}\right\}^2,$$

oder mit Weglassung der Constanten:

$$170)\quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{a+be^{\alpha x}}}$$

$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{a}}\left\{ l.(\sqrt{a+be^{\alpha x}}+\sqrt{a})^2 - \alpha x \right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{a}}\left\{ \alpha x - l.(\sqrt{a+be^{\alpha x}}-\sqrt{a})^2 \right\}.$$

Wenn a negativ ist, so ist

$$\frac{\partial v}{v^2-a} = \frac{\partial v}{(\sqrt{-a})^2+v^2},$$

also, wenn man

$$\frac{v}{\sqrt{-a}} = w, \quad \partial v = \sqrt{-a}.\partial w$$

setzt:

$$\frac{\partial v}{v^2-a} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{\partial w}{1+w^2},$$

folglich

$$\int\frac{\partial v}{v^2-a} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{\partial w}{1+w^2} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\ Arc\ tang\ w,$$

d. i.

$$\int\frac{\partial v}{v^2-a} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\ Arc\ tang\ \frac{v}{\sqrt{-a}},$$

folglich

$$\int\frac{\partial u}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\ Arc\ tang\ \frac{\sqrt{a+bu}}{\sqrt{-a}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\ Arc\ tang\sqrt{-1-\frac{b}{a}u}.$$

Daher ist in diesem Falle

$$171)\quad \int\frac{\partial x}{\sqrt{a+be^{\alpha x}}} = \frac{2}{\alpha\sqrt{-a}}\ Arc\ tang\ \frac{\sqrt{a+be^{\alpha x}}}{\sqrt{-a}}$$

oder

$$172)\quad \int\sqrt{\frac{\partial x}{a+be^{\alpha x}}} = \frac{2}{\alpha\sqrt{-a}}\ Arc\ tang\sqrt{-1-\frac{b}{a}e^{\alpha x}}.$$

Weil nun

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(y)}_{(0)}}}$$

$$= \int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + A(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2(1-e^{ay})}}$$

$$= \int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + A(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 - A(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, e^{ay}}}$$

ist, so ist, wenn wir

$$173)\quad \begin{cases} M^2 = \omega^2 + A(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2, \\ N^2 = A(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2, \\ M^2 - N^2 = \omega^2 \end{cases}$$

setzen, was verstattet ist, da A positiv sein soll, und M, N positiv nehmen:

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(y)}_{(0)}}} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}}},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(y)}_{(0)}}}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ l.(\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} + M)^2 - ay \right\}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ ay - l.(\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} - M)^2 \right\},$$

folglich

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2\, D^{(y)}_{(0)}}}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ l.(\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} + M)^2 - l.(\sqrt{M^2 - N^2} + M)^2 - ay \right\}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ ay - l.(\sqrt{M^2 - N^2 e^{ay}} - M)^2 + l.(\sqrt{M^2 - N^2} - M)^2 \right\},$$

d. i.

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(0)}^{(\gamma)}}}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ l.\left(\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{a\gamma}} + M}{\sqrt{M^2 - N^2} + M}\right)^2 - ay\right\}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ ay - l.\left(\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{a\gamma}} - M}{\sqrt{M^2 - N^2} - M}\right)^2\right\},$$

oder, was im vorliegenden Falle verstattet ist, kürzer:

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{\omega^2 + (1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2 D_{(0)}^{(\gamma)}}}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ 2\,l\,\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{a\gamma}} + M}{\sqrt{M^2 - N^2} + M} - ay\right\}$$

$$= \frac{1}{aM}\left\{ ay - 2\,l\,\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{a\gamma}} - M}{\sqrt{M^2 - N^2} - M}\right\}.$$

Die Gleichung des directen Zweigs ist folglich nach 99):

$$174)\quad x = \mp \frac{1}{aM}\left\{ 2\,l\,\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{a\gamma}} + M}{\sqrt{M^2 - N^2} + M} - ay\right\}$$

$$= \mp \frac{1}{aM}\left\{ ay - 2\,l\,\frac{\sqrt{M^2 - N^2 e^{a\gamma}} - M}{\sqrt{M^2 - N^2} - M}\right\},$$

wo das Zeichen auf bekannte Weise zu nehmen ist.

Man muss nun η aus der Gleichung

$$D_{(0)}^{(\eta)} = A\,(1 - e^{a\eta}) = -\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)\,\overline{\omega}^2}$$

$$= -\frac{M^2 - N^2}{N^2 : A} = -A\frac{M^2 - N^2}{N^2}$$

bestimmen. Aus dieser Gleichung folgt nämlich

$$1 - e^{a\eta} = -\frac{M^2 - N^2}{N^2},\quad e^{a\eta} = \frac{M^2}{N^2};$$

also

$$175)\quad a\eta = 2\,l\frac{M}{N},\quad \eta = \frac{2}{a}\,l\frac{M}{N}.$$

Dies, in die Gleichung 174) eingeführt, giebt, weil $M^2 - N^2 e^{a\eta} = M^2 - M^2 = 0$ ist:

$$176)\quad \xi = \mp\frac{1}{aM}\left\{2\,l\frac{M}{\sqrt{M^2-N^2}+M} - 2\,l\frac{M}{N}\right\}$$

$$= \mp\frac{2}{aM}\,l\frac{N}{\sqrt{M^2-N^2}+M}$$

$$= \mp\frac{1}{aM}\left\{2\,l\frac{M}{N} - 2\,l\frac{M}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

$$= \mp\frac{2}{aM}\,l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2}}{N}.$$

Also ist nach 100) für den reflectirten Zweig:

$$x = \mp\frac{4}{aM}\,l\frac{N}{\sqrt{M^2-N^2}+M}$$

$$\pm\frac{1}{aM}\left\{2\,l\frac{\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}+M}{\sqrt{M^2-N^2}+M} - ay\right\}$$

$$= \mp\frac{4}{aM}\,l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2}}{N}$$

$$\pm\frac{1}{aM}\left\{ay - 2\,l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\},$$

d. i.

$$x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay + 4\,lN - 2\,l.(\sqrt{M^2-N^2}+M)(\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}+M)\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay + 4\,lN - 2\,l.(M-\sqrt{M^2-N^2})(M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}})\right\}$$

oder

$$x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay + 4\,lN - 2\,l\frac{N^2(M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}})}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay + 4\,lN - 2\,l\frac{N^2(M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}})}{M+\sqrt{M^2-N^2}}\right\},$$

oder, wie sich hieraus sogleich ergiebt:

$$177)\quad x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay + 2l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2}}{M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay + 2l\frac{M+\sqrt{M^2-N^2}}{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}\right\},$$

oder

$$178)\quad x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay - 2l\frac{M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay - 2l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M+\sqrt{M^2-N^2}}\right\}.$$

Für den directen Zweig war nach 174)

$$x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay - 2l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

$$= \pm\frac{1}{aM}\left\{ay - 2l\frac{M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M+\sqrt{M^2-N^2}}\right\}.$$

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so erhellet leicht, dass man sagen kann, es sei für beide Zweige

$$179)\quad x = \mp\frac{1}{aM}\left\{ay - 2l\frac{M-\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M-\sqrt{M^2-N^2}}\right\}$$

oder

$$180)\quad x = \pm\frac{1}{aM}\left\{ay - 2l\frac{M+\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}}{M+\sqrt{M^2-N^2}}\right\},$$

wenn man nur $\sqrt{M^2-N^2e^{ay}}$ für den directen Zweig positiv, für den reflectirten Zweig negativ nimmt.

Diesen Gegenstand noch weiter auszuführen, ist jetzt nicht meine Absicht; in einigen späteren Aufsätzen hoffe ich jedoch auf die Lehre von der Luftspiegelung in so fern zurückzukommen, dass ich nach den in dieser Abhandlung gegebenen allgemeinen analytischen Entwickelungen die mehr physikalische Seite dieses interessanten Gegenstandes hervorzuheben und die vollständige Erklärung einzelner wichtiger und merkwürdiger Erscheinungen zu geben versuchen werde. Die Kenntniss der obigen allgemeinen Theorie ist

aber für Jeden unerlässlich, wer überhaupt sich eine tiefere Einsicht in die sämmtlichen hierher gehörenden, oft sehr auffallenden Naturerscheinungen verschaffen will. Von den früher von Biot in dem Werke: „Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon, par M. Biot. Paris. 1810. 4. *),“ so wie von Gergonne in der schon oben angeführten Abhandlung: „Essai analytique sur le phénomène du mirage (Annales de Mathématiques. Tome XX. 1829 et 1830. p. 1.) **)“ und Anderen gegebenen Entwickelungen der Theorie der Luftspiegelung unterscheidet sich die obige Theorie, wenn auch natürlich die Resultate übereinstimmen, in mehreren wesentlichen Punkten, und ich glaube dieselbe überhaupt dem grössten Theile nach als mein Eigenthum in Anspruch nehmen zu dürfen. Wie ich schon bemerkt habe, wird das eigentlich Physikalische den Gegenstand einiger späteren Aufsätze ausmachen, in denen ich auch angestellte Beobachtungen einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen hoffe, in einer ähnlichen Weise, wie dies z. B. in einer früheren Abhandlung (Nr. V.) in diesem Theile der Beiträge mit den Lambert'schen Dämmerungsbeobachtungen geschehen ist.

---

*) Einen ausführlichen Auszug von Brandes s. m. in Gilbert's Annalen der Physik. Thl. XLVII. S. 237. u. S. 366.

**) Ein früheres Memoire von Gergonne vom Jahre 1808, welches derselbe in den Annalen a. a. O. p. 3. erwähnt, habe ich mir bis jetzt nicht verschaffen können.

Anmerkung. Zum Schluss bemerke ich noch, um jedem Missverständnisse vorzubeugen, dass in der vorhergehenden Abhandlung, sowie in allen die terrestrische oder astronomische Strahlenbrechung ganz oder theilweise betreffenden Abhandlungen, wenn auf Ansichten über die Natur des Lichts zurückgegangen werden muss, die ältere Theorie des Lichts festgehalten worden ist, was auch schon bei der Theorie des Regenbogens, wie ich in der denselben betreffenden Abhandlung am gehörigen Orte bemerkt habe, ganz absichtlich geschehen ist. Auf welcher Seite der beiden gangbaren Theorieen des Lichts die Wahrheit eigentlich liegt, scheint mir, nach sehr sorgfältiger Beschäftigung mit diesem Gegenstande, immer noch nicht ganz ausgemacht zu sein, und ich wünsche daher sehr, bald Zeit zu gewinnen, in diesen Beiträgen meine Ansichten hierüber darlegen und zur vergleichenden Kritik beider Theorieen Einiges beitragen zu können.

G.

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Grunert, Johann August,

Beiträge zur meteorologischen Optik u. zu verwandten Wissenschaften In zwanglosen Heften

Bd.: 1,3

Lpzg 1848 - 50

Math.a. 93 qc-1,3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080740-5